МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Дальневосточный государственный технический университет

На правах рукописи

Ляховецкий Геннадий Владимирович

Функции гипергеометрического типа и их приложения

Специальность 01.01.01 - математический анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф-м.н., проф. Катрахов В.В.

Владивосток 1997

Содержание

Введение

0.1. Общая характеристика работы

Актуальность темы. Интегралы Меллина-Барнса и связанные с ними G-функция Мейера и H-функция Фокса, изучение которых началось в 30-х годах нашего столетия, в настоящее время находят все больше применений в теории интегральных уравнений и интегральных операторов, в теории специальных функций, в статистике, в теоретической механике и многих других областях математики.

Впервые систематическое изложение теории H-функции было приведено в [99]. Сходимость интеграла Меллина-Барнса, его разрывы и аналитические продолжения, а также интегралы от этой функции были изучены в [91]. Частные случаи H-функции Фокса возникают в работах по функциональным уравнениям с дробями Г-функций [66], [67], [68] и [81]. Асимптотические свойства функции $H(z)$ (как будет видно в главе 1, определение абстрактного интеграла Меллина-Барнса совпадает с определением H-функции Фокса, разнятся лишь ограничения на параметры, принятые в отдельных работах), аналитические продолжения ее в общем случае и различных ее частных случаев - специальных функций - были изучены также в [62] - [64] (см. также исправление в [131]), [69], [70] [97], - [99], [107], [108], [128], [129], [121], [126], [148], [151], - [153], [154]-[159]. Особенно отметим цикл статей Мейера (C.S. Meijer) [126], в которых, собственно, была введена G-функция, получены основные ее представления и изучены основные свойства. Работы по H-функции Фокса и интегралам Меллина-Барнса появились позже и во многом опирались на статьи Мейера. Отметим также часто цитируемые в данной работе монографию [42] и справочник [48], в котором, несмотря на сжатый стиль справочного издания, приведено наиболее точное, удобное и довольно полное, на взгляд автора, изложение определения и основных свойств H-функции Фокса.

Из недавних работ, использовавших аппарат интегралов Меллина-Барнса, отметим [11], [35] - [39], а также [132] и [133], в которых изучались применения интегралов Меллина-Барнса к получению экспоненциальных членов асимптотических разложений различных специальных функций.

Теория функций гипергеометрического типа тесно связана с теорией преобразования Меллина. Само определение G- и H-функций есть не что иное как обратное преобразование Меллина от дроби с произвольным количеством Г-функций в ее числителе и знаменателе. А образы Меллина многих специальных функций выражаются через такие дроби. На этом, в частности, основана монография О.И. Маричева [42]. В ней описан алгоритм расчета интегралов от специальных функций, представимых в виде свертки Меллина. Отметим также, что еще более широкий класс интегралов может быть вычислен применением кратного преобразования Меллина, что также упомянуто в [42]. Стоит также отметить работу Л.Дж. Слейтер (Luce Joan Slater) [143], теорема которой, уточненная и дополненная, и легла в основу работы О.И. Маричева и многих других авторов.

Целью данной работы является изучение класса функций гипергеометрического типа одной и нескольких переменных, их приложений в анализе, теории специальных функций, теории интегральных операторов преобразования, теоретической механике.

Методика исследований. В диссертации используются методы комплексного анализа, в частности теория вычетов, операционного исчисления, теории интегральных операторов и операторов преобразования, методы теории специальных функций и теории асимптотических оценок.

Научная новизна. Основные результаты, полученные в работе, состоят в следующем:

1. Исследовано разложение в ряд G-функции Мейера при произвольном сочетании параметров. Получен алгоритм вывода такого разложения для наиболее общего случая, для нескольких случаев с ограничениями на значения параметров получены явные формулы.

2. В качестве приложения интегралов Меллина-Барнса к задачам теории упругости получено выражение интеграла, встречающегося в задачах механики твердого тела, в виде интеграла Меллина-Барнса, через G-функцию Мейера и H-функцию Фокса. Исследованы асимптотические свойства этого интеграла при удалении от точки приложении силы.

3. Исследован класс операторов преобразования (ОП) Векуа-Эрдейи-Лаундеса, различные композиции которых выражаются в виде интегральных операторов с различными специальными функциями гипергеометрического типа в ядрах. Получен ряд новых операторов

того же типа. Доказано полугрупповое свойство. Установлено взаимнооднозначное соответствие между исследуемым классом ОП и классом ОП с базовым оператором $x^2 B_\nu$, где B_ν - дифференциальный оператор Бесселя, из чего следует представимость этого второго класса операторов через один такой оператор I и семейство операторов, коммутирующих с оператором двухкратного дифференцирования D^2.

4. Получены формулы композиций операторов Бушмана-Эрдейи, которые также выражаются в виде интегральных операторов с G-функцией Мейера в ядре.

Практическая и теоретическая значимость. Исследования, изложенные в диссертации, проводились в соответствии с утвержденными планами Российской Академии наук.

Все результаты диссертации являются новыми.

Результаты, полученные в работе, могут быть использованы при изучении широкого класса интегральных уравнений; в теории специальных функций при получении разложений в ряд и представлений в виде контурных интегралов в комплексной области, из которых следуют асимптотические свойства; при расчете задач теоретической механики; в теории интегральных и дифференциальных операторов.

Апробация работы. Результаты данной работы докладывались на семинаре по функциональному анализу и теории функций в Дальневосточном государственном университете (1997), на XXII дальневосточной математической школе-семинаре им. ак. Е.В. Золотова (1997), частично на международных конференциях в Самаре (1992), в Хабаровске (1993) и на 48 Британском математическом коллоквиуме (Манчестер, 1996).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах.

Объем и структура диссертации. Диссертация изложена на 117 страницах машинописного текста и состоит из введения, трех глав, списка литературы из 161 наименования и приложения.

0.2. Содержание работы

Работа посвящена изучению класса функций гипергеометрического типа (обобщенный гипергеометрический ряд одной и нескольких переменных, G-функция Мейера и H-функция Фокса), тесно связанных с ними интегралов Меллина-Барнса и их приложениям в математике и теоретической механике. Простейший представитель данного класса специальных функций - гипергеометрический ряд Гаусса - известен с прошлого века. Он вводится по формуле

$$F(a_1, a_2; b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k}{(b_1)_k} \frac{z^k}{k!},\ b_1 \neq 0, -1, -2, \dots, \tag{0.1}$$

где

$$(a)_0 = 1,\ (a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},\ n = 1, 2, 3, \dots -$$

символ Похгаммера. Этот ряд является решением гипергеометрического дифференциального уравнения второго порядка

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [b_1 - (a_1 + a_2 + 1)]\frac{du}{dz} - a_1 a_2 u = 0$$

при $b_1 \neq 0, -1, -2, \dots$, регулярным в точке $z = 0$. Свойства этой функции хорошо изучены. В частности, этот ряд абсолютно сходится при $|z| < 1$. Известны также условия сходимости этого ряда на границе круга. Подробное изложение свойств гипергеометрической функции может быть найдено, например, в классическом труде [5]. Среди простейших свойств этой функции отметим ее симметричность по параметрам a_1 и a_2 и аналитичность внутри круга сходимости.

Обобщенный гипергеометрический ряд, являющийся обобщением ряда Гаусса для произвольного числа параметров ${}_pF_q$ (определение его приведено в главе 1 данной работы), был введен Клаузеном (Clausen, [82]) для случая $p = 3,\ q = 2$. Само же обозначение ${}_pF_q$ введено Похгаммером и модифицировано Барнсом. Исследования этой функции (в том числе в виде решения дифференциального уравнения) были проведены в [63], [134] - [139] и во многих других работах. Достаточно полное изложение свойств этой функции с приведением дифференциальных уравнений, интегральных выражений, рекуррентных соотношений и асимптотических свойств можно найти в [5].

Как нетрудно видеть непосредственно из определения обобщенной гипергеометрической функции, при $p > q + 1$ ряд расходится всюду кроме нуля. Для придания смысла этому символу была введена Е-функция Мак-Роберта в виде суммы обобщенных гипергеометрических рядов: при $p \leq q + 1$ полагаем

$$E(p; \alpha_r : q; \rho_s : x) \equiv E((\alpha_p); (\rho_q); x) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\rho_1)\dots\Gamma(\rho_q)} {}_pF_q\left(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \rho_1, \dots, \rho_q; -\frac{1}{x}\right),$$

где $x \neq 0$, если $p < q$, и $|x| > 1$, если $p = q + 1$. При $p \geq q + 1$ полагаем

$$E(p;\alpha_r:q;\rho_s:x) = \sum_{r=1}^{p} \frac{\prod\limits_{s=1}^{p}{}' \, \Gamma(\alpha_s - \alpha_r)}{\prod\limits_{t=1}^{q} \Gamma(\rho_t - \rho_r)} \Gamma(\alpha_r) x^{\alpha_r} \times$$

$$\times {}_{q+1}F_{p-1} \left[\begin{array}{l} \alpha_r, \alpha_r - \rho_1 + 1, \ldots, \alpha_r - \rho_q + 1; \\ \alpha_r - \alpha_1 + 1, \ldots, *, \ldots, \alpha_r - \alpha_p + 1; (-1)^{p+q} x \end{array} \right],$$

где $|x| < 1$, если $p = q + 1$. Штрих у произведения означает, что опускается множитель $\Gamma(\alpha_r - \alpha_r)$, звездочка в F означает, что опускается параметр $\alpha_r - \alpha_r + 1$; пустое произведение интерпретируется как единица. Очевидно, в этих формулах необходимо потребовать, чтобы аргументы всех Г-функций (в том числе Г-функций из определений обобщенной гипергеометрической функции) из числителей дробей не принимали целых неположительных значений. В данной работе E-функция не рассматривается отдельно, т.к. она является частным случаем гораздо более общей G-функции Мейера:

$$E(p;\alpha_r:q;\rho_s:x) = G^{p,1}_{q+1,p} \left(x \left| \begin{array}{l} 1, \rho_1, \ldots, \rho_q \\ \alpha_1 \ldots \alpha_p \end{array} \right. \right).$$

Первоначально [124] G-функция Мейера была введена способом, аналогичным E-функции (см. также главу 1), однако впоследствие, в более поздних работах того же автора, это определение было заменено более общим - через контурный интеграл Меллина-Барнса.

Другим важным обобщением гипергеометрического ряда является H-функция Фокса. Ее определение, также в виде интеграла Меллина-Барнса, включает в себя не $p + q$ свободных параметров, как в случае G-функции Мейера, а $2p+2q$. Однако для многих важных частных случаев H-функция может быть сведена к G-функции. Подробнее см. главу 1 и уже цитированную монографию [48].

Под интегралами Меллина-Барнса мы понимаем интегралы вдоль контура C в комплексной области вида

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C h(s) z^{-s} ds, \; z \neq 0, \tag{0.2}$$

$$h(s) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j - \alpha_j s) \prod\limits_{j=1}^{m} \Gamma(b_j + \beta_j s)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j - \beta_j s) \prod\limits_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j + \alpha_j s)},$$

где $p,\ q,\ m,\ n$ - целые: $0 \le n \le p,\ 1 \le m \le q,\ \alpha_j > 0\ (j = 1, \ldots, p),\ \beta_i > 0\ (i = 1, \ldots, q)$ и $a_j\ (j = 1, \ldots, p),\ b_i\ (i = 1, \ldots, q)$ - комплексные числа, такие что

$$\alpha_j(b_i + k) \neq \beta_i(a_j - 1 - l), \qquad k, l = 0, 1, \ldots; \quad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n.$$

C - бесконечный контур, разделяющий полюса гамма-функций $\Gamma(1 - a_j - \alpha_j s)$ и $\Gamma(b_j + \beta_j s)$. Подробнее условия сходимости интеграла Меллина-Барнса приведены, например в [48], см. также главу 1. Отметим, что G-функция Мейера является частным случаем H-функции Фокса при $\alpha_j = \beta_i = 1,\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$.

Нетрудно видеть, что интеграл (0.2) является обратным преобразованием Меллина функции $h(s)$. В свою очередь, как уже было отмечено выше, образы Меллина многих специальных функций выражаются в виде дробей $Gamma$-функций и являются частными случаями $h(s)$. Далее, многие интегралы от специальных функций, встречающиеся в приложениях, могут быть представлены в виде свертки Меллина:

$$\int\limits_0^\infty \mathcal{K}_1\left(\frac{x}{t}\right)\mathcal{K}_2(t)\frac{dt}{t} = \mathcal{K}(x),\ x > 0. \tag{0.3}$$

Тогда, по теореме о свертке Меллина, образ Меллина интеграла (0.3) равен

$$M[\mathcal{K}](s) = M[\mathcal{K}_1](s)M[\mathcal{K}_2](s). \tag{0.4}$$

Теперь, применением обратного преобразования Меллина, этот интеграл может быть выражен через контурный интеграл, определенным образом огибающий полюса образа Меллина первоначального интеграла. Окончательно, интеграл (0.3) выражается в виде суммы вычетов подынтегрального выражения из обратного преобразования Меллина произведения (0.4). В упомянутой выше работе О.И. Маричева приведена также обширная таблица образов Меллина элементарных и специальных функций. Однако в [42] для выражения сумм вычетов были введены специальные функции Σ_A и Σ_B, чего можно было избежать, используя стандартные обозначения для функций Мейера и Фокса. Сама же идея вычисления интегралов вида (0.3) чрезвычайно плодотворна, с ее помощью может быть вычислен очень широкий класс интегралов от специальных функций.

В данной работе преобразование Меллина используется во второй и третьей главах. Во второй главе при вычислении определенного интеграла и в третьей при выводе формул композиций интегральных операторов.

Первая глава настоящей работы посвящена изучению свойств G-функции Мейера, и в частности получению формул разложения ее в окрестности нуля в ряд, который, однако, не является в общем случае степенным рядом. Известно, что при некоторых сочетаниях параметров G-функция имеет логарифмическую особенность в нуле и, следовательно, не может быть представлена в виде ряда по степеням z. Ранее уже были получены логарифмические разложения для некоторых частных случаев (напр. [42]), приведены общие рекомендации по получению таких разложений. Кроме того, в работах [122] и [123] приведены "формулы разложения G- и H-функций в ряд при произвольном сочетании параметров", однако, эти формулы не пригодны для вычислений - они содержат либо фактические ошибки, либо типографские опечатки. Таким образом, единственной достоверной формулой разложения G-функции в ряд следует считать широко известную классическую формулу, приведенную, например, в [5], которая неприменима во многих случаях сочетаний параметров. В данной работе разработан алгоритм получения таких разложений при произвольных сочетаниях параметров G-функции. Явные формулы разложений получены для случаев, когда числитель подынтегральной функции в определении G-функции имеет полюса порядка не выше 2. Получение явной формулы для случаев полюсов произвольного порядка представляется автору задачей трудоемкой и в цели настоящей работы не входит. Однако получение даже одного только алгоритма представляет достаточно большую ценность, т.к. разбор возможностей расположения полюсов подынтегральной функции довольно сложен и даже в монографии [5] при приведении формулы разложения допущена неточность при указании допустимых значений параметров.

Основным результатом первой главы можно считать алгоритм получения разложения G-функция в ряд при произвольном сочетании параметров. При этом символически разложение может быть выражено формулой

$$G_{p,q}^{m,n}(z) = \sum_{h=1}^{f} \sum_{\alpha=1}^{\overline{\alpha}_{l_h}} \sum_{u_p \in P_{l_h,\alpha}} \operatorname*{res}_{u=u_p} \mathcal{G}(u),$$

где f - количество непересекающихся цепочек полюсов подынтегральной функции $\mathcal{G}$ из определения G-функции (аналогичной функции $h(s)$ из определения (0.2) H-функции), $\overline{\alpha}_{l_h}$ - количество групп полюсов одного "типа" (формальное определение типа полюса см. в первой главе, коротко, два полюса принадлежат к одному типу, если вычеты данной функции в них вычисляются по одной и той же формуле) в цепочке с номером h, $P_{l_h,\alpha}$ - множество полюсов в данной группе (с номером α) данной цепочки.

Кроме того, в первой главе даны явные формулы для вычетов $\mathcal{G}$ в полюсах 4 наиболее "простых" типов.

Главы вторая и третья рассматривают различные приложения специальных функций гипергеометрического типа. Во второй главе рассмотрена задача механики сплошных сред о нагружении сосредоточенной силой бесконечной пластины, покоящейся на упругом полупространстве. В этом случае прогиб и реактивное давление, являющиеся функциями радиальной переменной, выражаются через интеграл с функцией Бесселя:

$$\omega_s^\nu(x) = \int_0^\infty \frac{y^s}{1+y^3} J_\nu(xy)dy. \tag{0.5}$$

Здесь $J_\nu(z)$ - функция Бесселя первого типа. Этот интеграл отсутствует в справочниках. Он вычисляется применением прямого и обратного преобразований Меллина. Выражение интеграла через G-функцию Мейера не представляет труда. Однако получение представления, пригодного для численных расчетов, гораздо сложнее. Данный интеграл содержит два произвольных параметра ν и s, и формула разложения в ряд существенно зависит от конкретных значений этих параметров. Сразу оговоримся. Очевидным обобщением этого интеграла является замена знаменателя подынтегрального выражения $1+y^3$ на более общий многочлен, например, на $1+y^a$. В этом случае получение представления интеграла через H-функцию Фокса также не представляет труда:

$$\int_0^\infty \frac{y^s}{1+y^a} J_\nu(xy)dy = \frac{1}{2a} H_{1,3}^{2,1}\left[\frac{x}{2}\,\middle|\, \begin{matrix} \left(\frac{2}{a}-\frac{s}{a},\frac{1}{a}\right) \\ \left(\frac{2}{a}-\frac{s}{a},\frac{1}{a}\right), \left(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2}\right) \end{matrix}\right].$$

Эта функция в случае, когда полюса Г-функций из представления H-функции в виде контурного интеграла не совпадают, может быть разложена в ряд по формуле, приведенной, например, в [48]. Однако, полный разбор всех случаев взаимного расположения полюсов еще больше, чем в случае знаменателя $1+y^3$ усложняется.

Вернемся к исходной задаче со знаменателем $1+y^3$. В этом случае интеграл порождает восемь формул разложения в ряд, перечисленных в теореме 2.4 (при этом пункт 2 теоремы на самом деле содержит два разложения). Например, реактивное давление p в упомянутой выше задаче теории упругости выражается через функцию $\omega_1^0(x)$, для которой справедлива

Теорема 0.1. *Функция*

$$\Omega_1^0(z) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\, {}_0F_5\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},1;-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right) -$$

$$
-z\ {}_1F_6\left[\begin{matrix}1; \\ \frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{5}{6},\frac{7}{6},\frac{7}{6};\end{matrix}\ -\left(\frac{z}{6}\right)^6\right]+
$$

$$
+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}z^2\ {}_0F_5\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3},1;-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)-
$$

$$
-\frac{1}{192}z^4\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi(1+k)+\psi\left(\frac{4}{3}+k\right)+\psi\left(\frac{5}{3}+k\right)}{(1)_k\left(\frac{4}{3}\right)_k\left(\frac{4}{3}\right)_k\left(\frac{5}{3}\right)_k\left(\frac{5}{3}\right)_k}\frac{\left(-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)^k}{k!}+
$$

$$
+\frac{1}{64}z^4\ln\frac{z}{6}{}_0F_5\left(1,\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3};-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)
$$

является аналитическим продолжением в комплексную область функции $\omega_1^0(x)$ *и при* $x>0$ $\omega_1^0(x)=\Omega_1^0(x)$.

(См. также теорему 2.2 в тексте второй главы.)

Как уже было отмечено, полученные формулы разложений могут быть использованы для проведения численных расчетов. Такие расчеты были проведены для ряда пар значений ν и s и их результаты представлены в виде графиков. Ряды, по которым были произведены вычисления имеют общий член вида $\dfrac{z^k}{(k!)^5}$ и, следовательно, очень быстро сходятся. Кроме того, получены асимптотические формулы при больших значениях аргумента. На графиках для удобства сравнения приведены результаты расчетов по формулам разложения G-функции, по квадратурным формулам вычисления несобственных интегралов от осциллирующих функций и по асимптотическим формулам. Хорошо видно, как линия, представляющая результат вычисления по формуле ряда, начиная с некоторого значения аргумента, хорошо согласуется с асимптотической кривой, в то время, как квадратурная формула дает осциллирующую кривую, лучше или хуже, в зависимости от конкретных значений параметров, аппроксимирующую точный результат. В несколько сокращенном виде данная глава была опубликована автором в Дальневосточном математическом сборнике [37].

Третья глава посвящена приложению функций гипергеометрического типа к теории интегральных операторов преобразования (ОП).

Теория операторов преобразования довольно полно изложена в монографиях [31], [43], [44], [57], [75]-[80], [83], [84], [100]-[102], [113]. Подробно изучены следующие классы ОП.

Волновые операторы, которые являются сплетающими и укладываются в общую схему ОП. Теория волновых операторов изложена, например, в [4], [14], [49]. ОП Сонина-Пуассона-Дельсарта (СПД) введены и изучены в [15], [16], [18], [30], [88]-[90], [111], [112]. Они сводятся к интегральным операторам Эрдейи-Кобера [50]. Алгебры псевдодифференциальных операторов с использованием операторов СПД изучены в [18], [19], [26], [34], [77]. Еще один класс ОП - операторы подобия. Они важны как в линейной алгебре [12], так и в теории слабых возмущений самосопряженных эллиптических ПДО на окружности [2]. Метод ОП является основой при изучении обратных задач для операторов Штурма-Лиувилля и Дирака [29], [32], [33], [43], [44], в теории рассеяния [59], [76]-[79], [85], при изучении уравнений с частными производными в комплексной плоскости (ОП Бергмана-Джилберта) [3], [10], [83], [84], [100]-[102]. Как составная часть метода обратной задачи ОП используются при решении нелинейных уравнений [1], [32], [45], [79], [80], [109]. Фундаментальные результаты для ОП высших порядков получены в [40], [57]. Операторы Бушмана-Эрдейи, которым посвящен последний раздел 3 главы данной работы, также являются ОП. Достаточно общий метод факторизации для построения известных и новых классов ОП в виде композиций весовых интегральных операторов Фурье, который развивает метод спектральных пар Р. Кэрролла [76]-[78], разработан в [24].

В самом общем виде ОП T вводится по формуле

$$TA = BT,$$

где A и B - некоторые операторы. В третьей главе данной работы рассмотрен важный класс операторов преобразования - ОП Векуа-Эрдейи-Лаундеса. Эти операторы были введены и изучены в работах И.Н. Векуа, А. Эрдейи и Дж.С. Лаундеса. Именно, в работах перечисленных авторов изучались операторы, осуществляющие преобразования следующего вида:

$$T\ A = (A + \lambda)\ T,$$

где A - один из операторов

$$A = D^2 = \frac{d^2}{dx^2},\ A = B_\nu = D^2 + \frac{2\nu+1}{x}D,\ A = x^2 B_\nu.$$

В настоящей работе продолжается рассмотрение тех же базовых операторов A. Прежде всего, в сжатой форме в главе перечислены известные ОП ВЭЛ с кратким изложением их основных свойств. Среди рассмотренных операторы дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля, обобщающие их операторы Эрдейи-Кобера, сверточные и несверточные интегральные операторы с функциями Бесселя в ядрах. Изучению двух из них - операторов

$$_1J_\lambda \equiv J_\lambda f(x) = f(x) - \lambda \int\limits_0^x t \frac{J_1\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}} f(t)dt$$

и

$$ {}_1R_\lambda \equiv R_\lambda f(x) = f(x) - \lambda \int\limits_x^\infty t \frac{J_1\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}} f(t)dt, $$

а также связанных с ними, и посвящена в основном глава. Прежде всего, с помощью операций сопряжения и обращения на базе данных двух операторов строятся еще 6 операторов ${}_2R_\lambda,\ {}_2J_\lambda, \ldots, {}_4R_\lambda,\ {}_4J_\lambda$ со схожими свойствами. Следующим шагом вводятся еще 8 операторов, связанных с первыми восемью операцией дифференцирования. Для двух исходных операторов доказано сплетающее свойство:

$$ J_\lambda\ B_\nu f = (B_\nu + \lambda^2) J_\lambda f, $$

$$ R_\lambda\ B_\nu f = (B_\nu - \lambda^2) R_\lambda f, $$

где $B_\nu = \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{2\nu+1}{x}\dfrac{d}{dx}$ - дифференциальный оператор Бесселя. Аналогичные формулы легко могут быть доказаны для остальных десяти введенных операторов. Представляется важным результат (теорема 3.2), устанавливающий взаимнооднозначное соответствие между ОП ВЭЛ, сплетающими по формуле

$$ T(a,b)(D^2+a) = (D^2+b)T(a,b) \tag{0.6} $$

и ОП, осуществляющими преобразование вида

$$ I(\mu,\nu)(x^2 B_\mu) = (x^2 B_\nu) I(\mu,\nu). \tag{0.7} $$

Известно, что ОП ВЭЛ, действующие по формуле (0.6), могут буть выражены через единственный такой (обратимый) оператор T_0 и семейство операторов, коммутирующих с оператором двухкратного дифференцирования D^2. Таким образом, как следует из этой теоремы, то же самое справедливо и для операторов I, сплетающих оператор $x^2 B_\mu$ по формуле (0.7).

Для тех же двух исходных операторов доказано полугрупповое свойство. Оно легко может быть распространено на ОП ${}_2R_\lambda,\ {}_2J_\lambda, \ldots, {}_4R_\lambda,\ {}_4J_\lambda$ по приведенным в главе формулам связи.

В.В. Катраховым в работе [24] описаны методы факторизации интегральных операторов. Используя его, получены новые ОП, их интегральные представления. Сверточные свойства этих новых операторов следуют из свойств операторов, их образующих. Понятно, что полученные три новых ОП ВЭЛ далеко не исчерпывают возможностей применения данного метода к рассмотренным в главе операторам.

В заключительном разделе третьей главы рассматриваются интегральные операторы Бушмана-Эрдейи

$$\left(B_{0+}^{\nu,\mu}f\right)(x)=\int\limits_0^x\left(x^2-y^2\right)^{-\mu/2}P_\nu^\mu\left(\frac{x}{y}\right)f(y)dy, \tag{0.8}$$

$$\left(E_{0+}^{\nu,\mu}f\right)(x)=\int\limits_0^x\left(x^2-y^2\right)^{-\mu/2}\mathbf{P}_\nu^\mu\left(\frac{y}{x}\right)f(y)dy, \tag{0.9}$$

$$\left(B_{-}^{\nu,\mu}f\right)(x)=\int\limits_x^\infty\left(y^2-x^2\right)^{-\mu/2}P_\nu^\mu\left(\frac{y}{x}\right)f(y)dy, \tag{0.10}$$

$$\left(E_{-}^{\nu,\mu}f\right)(x)=\int\limits_x^\infty\left(y^2-x^2\right)^{-\mu/2}\mathbf{P}_\nu^\mu\left(\frac{x}{y}\right)f(y)dy, \tag{0.11}$$

где $P_\nu^\mu(z)$ - функция Лежандра 1 рода, $\mathbf{P}_\nu^\mu(t)$ - та же функция на разрезе $-1<t<1$. Класс операторов Бушмана-Эрдейи был введен и изучен в [73], [73], [93], [95] (в этих работах, в частности, было исследовано обращение интегральных уравнений с операторами (0.8)-(0.11)), [18], [19], [20], [38]-[35], [50], [52], [54]- [56], [105], наиболее полное изложение свойств содержится в препринте [54]. В частности там получены формулы факторизаций этих операторов через операторы дробного интегродифференцирования и Эрдейи-Кобера. Класс ОП Бушмана-Эрдейи был использован В.В. Катраховым для введения функциональных пространств и постановок новых задач с "сигма-следом" для вырождающихся эллиптических уравнений, допускающих сингулярные решения с существенно особыми точками [21]-[23]. Операторы Бушмана-Эрдейи встречаются, например, в следующих вопросах математической физики: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу в четверти плоскости [74]; при установлении соотношения между значениями решений уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике [41], [50], [54]; в теории преобразования Радона [105], [120], [127], для которого они являются с точностью до степенных множителей одномерными проекциями на собственные подпространства сферических гармоник [46], [86], [87]; при исследовании краевых задач для эллиптических уравнений с внутренней особой точкой [21], [23]; при построении общей теории операторов преобразования для дифференциального выражения Бесселя [24].

Основные результаты этого раздела могут быть представлены в виде следующей теоремы:

Теорема 0.2. *Пусть* $Re\,\mu_1<1,\ Re\,\mu_2<1,\ f\in S_{0+},\ x\geq 0.$ *Тогда* *справедливы формулы композиции*

$$\left(E_{0+}^{\nu_1,\mu_1} E_{0+}^{\nu_2,\mu_2} f\right)(x) = \int\limits_0^x K_1(\nu_1,\nu_2,\mu_1,\mu_2;x,t) f(t)dt,$$

где ядро K_1 *выражается через* G*-функцию Мейера*

$$K_1(\nu_1,\nu_2,\mu_1,\mu_2;x,t) = 2^{\mu_1+\mu_2-1}\frac{x^{2-\mu_1-\mu_2}}{t}\times$$

$$\times G_{4,4}^{0,4}\left(\frac{x^2}{t^2}\,\middle|\, \begin{matrix} 0, & \frac{1}{2}, & \frac{\mu_2}{2}, & -\frac{1}{2}+\frac{\mu_2}{2} \\ -\frac{1}{2}+\frac{\mu_1}{2}+\frac{\mu_2}{2}+\frac{\nu_1}{2}, & -1+\frac{\mu_1}{2}+\frac{\mu_2}{2}-\frac{\nu_1}{2}, & \frac{\mu_2}{2}+\frac{\nu_2}{2}, & -\frac{1}{2}+\frac{\mu_2}{2}+\frac{\nu_2}{2} \end{matrix}\right)$$

и

$$\left(B_{0+}^{\nu_1,\mu_1} B_{0+}^{\nu_2,\mu_2} f\right)(x) = \int\limits_0^x K_2(\nu_1,\nu_2,\mu_1,\mu_2;x,t) f(t)dt,$$

в которой ядро K_2 *выражается через* G*-функцию Мейера*

$$K_2(\nu_1,\nu_2,\mu_1,\mu_2;x,t) = 2^{\mu_1+\mu_2-1}\frac{x^{2-\mu_1-\mu_2}}{t}\times$$

$$\times G_{4,4}^{0,4}\left(\frac{x^2}{t^2}\,\middle|\, \begin{matrix} \frac{\mu_2}{2}+\frac{\nu_1}{2}, & -\frac{1}{2}+\frac{\mu_2}{2}-\frac{\nu_1}{2}, & \frac{1}{2}+\frac{\nu_2}{2}, & -\frac{\nu_2}{2} \\ -\frac{1}{2}+\frac{\mu_1}{2}+\frac{\mu_2}{2}, & -1+\frac{\mu_1}{2}+\frac{\mu_2}{2}, & \frac{\mu_2}{2}, & -\frac{1}{2}+\frac{\mu_2}{2} \end{matrix}\right).$$

Глава 1

Разложение в ряд G-функции. Общий случай

1.1. Базовые определения и обозначения

В данной главе мы разработаем алгоритм получения разложения в ряд G-функции Мейера в самом общем случае. Вывод явной формулы такого разложения представляется автору проблематичным и в задачи данной работы не входит. Попытки получения такой формулы были совершены ранее в [122], [123], однако формулы, приведенные в этих работах содержат ошибки (либо типографские, либо фактические) и не могут быть использованы, в работе [70], на которую ссылаются Mathai и Saxena, даны лишь самые общие указания для расчета G-функций, в основном эта работа посвящена получению асимптотических формул.

Прежде всего введем базовые обозначения, которые мы будем использовать на протяжение всей работы. Напомним следующие общепринятые обозначения для числовых множеств: $\mathbf{N}$ - множество натуральных чисел, $\mathbf{N}_0 = \{0\} \cup \mathbf{N}$, $-\mathbf{N}$ - множество целых отрицательных чисел, $\mathbf{Z}$ - множество целых чисел, $\mathbf{R}$ - множество действительных чисел, $\mathbf{C}$ - множество комплексных чисел.

Мы будем использовать следующее обозначение для гамма-функции матричного аргумента:

$$\Gamma\left[\begin{array}{c} a_1, \ldots, a_i \\ b_1, \ldots, b_j \end{array}\right] = \frac{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_i)}{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_j)}. \tag{1.1}$$

Обобщенный гипергеометрический ряд (Гаусса) вводится по формуле

$$ {}_pF_q((a_p);(b_q);z) = {}_pF_q\left(\begin{array}{cc} a_1, \ldots, a_p; & z \\ b_1, \ldots, b_q & \end{array}\right) = $$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{1.2}$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1) = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ - символ Похгаммера. Гипергеометрический ряд Гаусса $F(a,b;c;z)$ является частным случаем этой функции $F(a,b;c;z) \equiv {}_2F_1(a,b;c;z)$. Ряд (1.2) сходится для всех конечных значений $z \in \mathbf{C}$, если $p \le q$, сходится при $|z| < 1$, если $p = q+1$, и расходится при всех $z \ne 0$, если $p > q+1$. Функция ${}_pF_q((a_p);(b_q);z)$, как следует непосредственно из определения, симметрична относительно верхних параметров $a_1, \dots, a_p$ и относительно нижних параметров $b_1, \dots, b_q$. При фиксированном значении аргумента z функция $\Gamma^{-1}[(b_q)]_pF_q((a_p);(b_q);z)$ является целой аналитической функцией параметров [5], [48].

Мы будем использовать еще одно удобное обозначение

$${}_pF_q{}^{(r)}((a_p);(b_q);z) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{1.3}$$

назовем эту функцию "усеченная гипергеометрическая функция". Вообще, для любой суммы $A = \sum\limits_{k=M}^{N}$, $M \le N$, N - конечное число или ∞, через $A^{(r)}$ мы будем обозначать "усеченную" сумму $A^{(r)} = \sum\limits_{k=r}^{N}$, при этом, если $r > N$, $A^{(r)} = 0$.

Мы определим G-функцию Мейера порядка (m,n,p,q), где $0 \le m \le q$, $0 \le n \le p$ следуя [48] в виде контурного интеграла в комплексном пространстве вида:

$$G^{m,n}_{p,q}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right) = G^{m,n}_{p,q}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}a_1, & \dots, & a_p\\ b_1, & \dots, & b_q\end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_G} \frac{\Gamma(b_1+u)\dots\Gamma(b_m+u)\Gamma(1-a_1-u)\dots\Gamma(1-a_n-u)}{\Gamma(a_{n+1}+u)\dots\Gamma(a_p+u)\Gamma(1-b_{m+1}-u)\dots\Gamma(1-b_q-u)} z^{-u} du. \tag{1.4}$$

Отметим, что первоначально в работе Мейера [124] G-функция была введена в виде суммы обобщенных гипергеометрических функций. Позже ([125], [126]) это определение было заменено определением с помощью интеграла Меллина-Барнса (1.4) (определение интегралов Меллина-Барнса может быть найдено, например, в [5], [42], фактически оно совпадает с правой частью (1.5)).

Существует несколько возможностей для контура L_G, они подробно описаны в [5] и в [48]. Отметим только, что все эти контуры являются бесконечными петлями, разделяющими полюса гамма-функций вида

$\Gamma(b_j+u)$, $j=1,2,\ldots,m$ и $\Gamma(1-a_j-u)$, $j=1,2,\ldots,n$. Очевидно, для существования такого контура необходимо потребовать, чтобы полюса Г-функций аргументов b_j+u, $j=1,\ldots,m$ не совпадали с полюсами Г-функций аргументов $1-a_j-u$, $j=1,\ldots,n$, т.е. для всех $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, $a_j-b_i\neq k$, $k=1,2,\ldots$ Это условие является необходимым для существования G-функции и его выполнение будет предполагаться на протяжение всей работы. Мы главным образом будем иметь в виду один из этих контуров, а именно $L_{-\infty}$. Этот контур является левой петлей, лежащей в горизонтальной полосе, начинающийся в точке $-\infty+i\phi_1$, оставляющий все полюса подынтегральной функции вида $u=-b_j-k$, $j=1,2,\ldots,n$, $k=0,1,2,\ldots$ слева и все полюса вида $u=1-a_j+k$, $j=1,2,\ldots,m$, $k=0,1,2,\ldots$ справа от контура и заканчивающийся в точке $-\infty+i\phi_2$, где $\phi_1<\phi_2$. Этот контур интегрирования применяется (интеграл вдоль него сходится) при $p<q$, $0<|z|<\infty$ или $p=q$, $0<|z|<1$ или $p=q$, $c^*\geq 0$, $|z|=1$, $\operatorname{Re}\mu<0$, где

$$c^*=m+n-\frac{p+q}{2},$$

$$\mu=\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j+\frac{p-q}{2}+1.$$

Заметим, что все результаты данной работы могут быть также применены к G-функции порядка $p>q$ посредством преобразования ее в функцию порядка $p<q$ по стандартной формуле, например из [48].

Основные свойства G-функции могут быть найдены, например, в [5]. Укажем только, что G-функция является аналитической функцией от z; она симметрична относительно параметров $a_1,\ldots,a_n$, равно как и параметров $a_{n+1},\ldots,a_p$, $b_1,\ldots,b_m$ и $b_{m+1},\ldots,b_q$.

H-функцию Фокса мы определим по формуле

$$H_{p,q}^{m,n}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}[a_p,A_p]\\ [b_q,B_q]\end{matrix}\right)=H_{p,q}^{m,n}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_1,A_1), & \ldots, & (a_p,A_p)\\ (b_1,B_1), & \ldots, & (b_q,B_q)\end{matrix}\right)=\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int\limits_{L_H}\frac{\Gamma(b_1+B_1u)\ldots\Gamma(b_m+B_mu)\Gamma(1-a_1-A_1u)\ldots\Gamma(1-a_n-A_nu)}{\Gamma(a_{n+1}+A_{n+1}u)\ldots\Gamma(a_p+A_pu)\Gamma(1-b_{m+1}-B_{m+1}u)\ldots\Gamma(1-b_q-B_qu)}z^{-u}du, \tag{1.5}$$

где $A_i,\ B_j>0$, $i=1,2,\ldots,p$, $j=1,2,\ldots,q$, $[a_p,A_p]=(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)$, $[b_q,B_q]=(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)$. Описание контуров интегрирования, условий сходимости интеграла и основных свойств H-функции можно найти в [48]. Как и в случаях функций ${}_pF_q((a_p);(b_q);z)$ и $G_{p,q}^{m,n}((a_p);(b_q);z)$ H-функция обладает свойством симметрии - она симметрична по парам $(a_1,A_1),\ldots,(a_n,A_n)$; $(a_{n+1},A_{n+1}),\ldots,(a_p,A_p)$; $(b_1,B_1),\ldots,(b_m,B_m)$ и

$(b_{m+1}, B_{m+1}), \ldots, (b_q, B_q)$ в отдельности. Функция $H^{m,n}_{p,q}$ аналитична по z в секторе $|\arg\, z| < a^*\pi/2$, где

$$a^* = \sum_{j=1}^{n} A_j - \sum_{j=n+1}^{p} A_j + \sum_{j=1}^{m} B_j - \sum_{j=m+1}^{q} B_j.$$

При $A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_q > 0$ рациональных (а также, например, при $A_i = g\tilde{A}_i,\ B_j = g\tilde{B}_j,\ i = 1, 2, \ldots, p,\ j = 1, 2, \ldots, q,\ g > 0$ - иррациональное, $\tilde{A}_i, \tilde{B}_j$ - рациональные) функция H может быть выражена через G-функцию (см. напр. [48]), поэтому, а также потому, что в случаях, когда непосредственное выражение через G-функцию невозможно, все методы данной главы могут легко быть перенесены на H-функцию, мы ограничимся рассмотрением G-функции.

Обозначим подынтегральную функцию (1.4) $\mathcal{G}^{m,n}_{p,q}(u)$, тогда

$$G^{m,n}_{p,q}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_G} \mathcal{G}^{m,n}_{p,q}(u) du.$$

Обозначим также

$$B^+(u) = \Gamma(b_1 + u) \ldots \Gamma(b_m + u),$$

$$A^+(u) = \Gamma(1 - a_1 - u) \ldots \Gamma(1 - a_n - u),$$

$$A^-(u) = \Gamma(a_{n+1} + u) \ldots \Gamma(a_p + u),$$

$$B^-(u) = \Gamma(1 - b_{m+1} - u) \ldots \Gamma(1 - b_q - u);$$

тогда

$$\mathcal{G}^{m,n}_{p,q}(u) = \frac{B^+(u) A^+(u)}{A^-(u) B^-(u)} z^{-u}.$$

Мы также будем использовать еще одно удобное обозначение: $B^+_{>i_1, i_2, \ldots, i_f<}(u)$ равно функции $B^+(u)$ с исключенными Γ-функциями $\Gamma(b_{i_1} + u), \Gamma(b_{i_2} + u), \ldots, \Gamma(b_{i_f} + u)$. Аналогично для A^+, A^-, B^-.

Нашей целью является описание алгоритма разложения G-функции в ряд вычетов функции $\mathcal{G}^{m,n}_{p,q}(u)$ в наиболее общем случае значений параметров $a_1, \ldots, a_p,\ b_1, \ldots, b_q$.

1.2. Простые полюса подынтегральной функции

Прежде всего рассмотрим случай, когда функция $B^+(u)$ имеет только простые полюса, то есть $b_i - b_j \neq k,\ i, j = 1, \ldots, m,\ i \neq j,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Тогда единственная сложность, которая может возникнуть, это если некоторые полюса $B^+(u)$ взаимно уничтожаются с полюсами $A^-(u)$ или $B^-(u)$. Если таких уничтожений не возникает, искомое разложение дается формулой

$$G^{m,n}_{p,q}\left(z\,\middle|\,\begin{array}{ccc} a_1, & \dots, & a_p \\ b_1, & \dots, & b_q \end{array}\right) =$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \frac{B^+_{>h<}(-b_h)A^+(-b_h)}{A^-(-b_h)B^-(-b_h)} z^{b_h}\, {}_pF_{q-1}\left(\begin{array}{ll} 1+b_h-(a_p); & (-1)^{p-m-n}z \\ 1+b_h-(b_q)' & \end{array}\right), \quad (1.6)$$

где $b_h-(b_q)' \equiv b_h-b_1,\dots,b_h-b_{h-1},b_h-b_{h+1},\dots,b_h-b_q$ (компонента b_h-b_h отсутствует). Эта формула приведена во многих справочниках, в том числе в [5] и [48], причем в обоих этих справочниках не указано, что эта формула не может быть применена непосредственно, когда имеют место уничтожения полюсов произведения $B^+(u)$ со знаменателем, хотя она по прежнему "условно" применима, приняв $1/\Gamma(-n)=0,\ n=0,1,\dots$, расписав гипергеометрическую функцию в виде ряда и отбросив его нулевые члены. В данной главе мы получим формулы разложений для случаев, когда такие уничтожения разрешены, а также для нескольких более сложных случаев.

Рассмотрим первую гамма-функцию из $B^+(u)$, $\Gamma(b_1+u)$. Она имеет простые полюса в точках $u_p=-b_1,-b_1-1,-b_1-2,\dots$ В общем случае несколько Γ-функций из знаменателя $\mathcal{G}$ могут иметь полюса в тех же самых точках. Но, на самом деле, нам не нужно рассматривать их все, нам только нужно найти максимум две такие функции - по одной из каждого произведения $A^-(u)$ и $B^-(u)$, уничтожающих наибольшее количество полюсов функции $\Gamma(b_1+u)$. Действительно, не теряя общности, предположим $a_{n+1}=b_1+r_1,\ a_{n+2}=b_1+r_2$, т.е.

$$A^-(u)=\Gamma(b_1+r_1+u)\Gamma(b_1+r_2+u)\Gamma(a_{n+3}+u)\dots\Gamma(a_p+u),\ r_1,r_2\in\mathbf{Z}.$$

Тогда полюса функции $\Gamma(b_1+u)$ в точках $u_p=-b_1-r_1,-b_1-r_1-1,-b_1-r_1-2,\dots$ и в точках $u_p=-b_1-r_2,-b_1-r_2-1,-b_1-r_2-2,\dots$ уничтожаются с полюсами $\Gamma(a_{n+1}+u)$ и $\Gamma(a_{n+2}+u)$ соответственно. На самом деле, в точках $u_p=-b_1-\max(r_1,r_2),\ -b_1-\max(r_1,r_2)-1,\ -b_2-\max(r_1,r_2)-2,\dots$ полюса "уничтожаются дважды", то есть функция B^+ имеет простые полюса в этих точках, а функция A^- - полюса второго (или более высокого) порядка, а значит $\mathcal{G}$ имеет в этих точках нули первого порядка (если более двух Γ-функций из знаменателя имеют полюса в тех же самых точках, $\mathcal{G}$ имеет в этих точках нули более высокого порядка). Для наших целей нам только нужно знать в каких точках функция $\mathcal{G}$ имеет полюса и какого порядка (и, конечно, значения вычетов), таким образом, из двух (или больше) Γ-функций - сомножителей $A^-(u)$, имеющих полюса в тех же точках, что и $\Gamma(b_1+u)$, нам только нужно рассматривать функцию $\Gamma(b_1+\underline{r}+u), \underline{r} = \min(r_1,r_2)$ (или $\underline{r}=\min(r_1,r_2,r_3,\ldots,r_o)$, o - количество таких Γ-функций сомножителей $A^-(u)$). Аналогично, из всех Γ-функций - сомножителей $B^-(u)$ вида $\Gamma(-b_1-R_k-u)$, $R_k\in\mathbf{N_0}$ (они имеют полюса в точках $u_p = -b_1-R_k, -b_1-R_k+1, -b_1-R_k+2,\ldots$) нам только нужно рассматривать функцию $\Gamma(-b_1-\overline{r}-u)$, $\overline{r}=\max(R_1,R_2,R_3,\ldots,R_o)$. Если никакие полюса $A^-(u)$ ($B^-(u)$) не совпадают с полюсами $\Gamma(b_1+u)$, мы положим $\underline{r}=\infty$ ($\overline{r}=-1$). Может оказаться, что все полюса $\Gamma(b_1+u)$ уничтожаются. Иначе (если $\underline{r}>\overline{r}+1$), по двум индексам $\underline{r}$ и $\overline{r}$ мы делаем вывод, что $\mathcal{G}$ имеет полюса в точках $-b_1-\overline{r}-1, -b_1-\overline{r}-2,\ldots,-b_1-\underline{r}+1$. Существуют пять возможностей:

1) $\mathcal{G}$ не имеет полюсов в точках $u_p=-b_1,-b_1-1,-b_1-2,\ldots$, т.е. все полюса уничтожаются;

2) $\mathcal{G}$ имеет полюса в точках $u_p=-b_1,-b_1-1,\ldots,-b_1-\underline{r}+1$, $\underline{r}\neq\infty$;

3) $\mathcal{G}$ имеет полюса в точках $u_p=-b_1-\overline{r}-1,-b_1-\overline{r}-2,\ldots,-b_1-\underline{r}+1$, $\underline{r}\neq\infty$, $\overline{r}\neq-1$;

4) $\mathcal{G}$ имеет полюса в точках $u_p=-b_1,-b_1-1,\ldots$;

5) $\mathcal{G}$ имеет полюса в точках $u_p=-b_1-\overline{r}-1,-b_1-\overline{r}-2,\ldots$, $\overline{r}\neq-1$.

Далее рассмотрим все остальные Γ-функции $\Gamma(b_l+u)$, $l=2,\ldots,m$. Аналогично, для каждой из них имеет место одна из возможностей 1-5 и могут быть вычислены индексы $\overline{r_l},\underline{r_l}$ (для единообразия обозначим $\overline{r_1}=\overline{r}$, $\underline{r_1}=\underline{r}$). Мы также введем обозначения L_α, $\alpha=1,\ldots,5$ для множеств индексов, так что $l\in L_\alpha \Leftrightarrow$ для $\Gamma(b_l+u)$ выполняется (α). Теперь можно вычислить интеграл (1.4) как сумму вычетов $\mathcal{G}(u)$ в полюсах, лежащих внутри контура $L_{-\infty}$:

$$
\begin{aligned}
G^{m,n}_{p,q}(z) \;=\;& \sum_{l\in L_2}\sum_{k=0}^{\underline{r_l}-1}\operatorname*{res}_{u=-b_l-k}\mathcal{G}(u)+\\
&+\sum_{l\in L_3}\sum_{k=\overline{r_l}+1}^{\underline{r_l}-1}\operatorname*{res}_{u=-b_l-k}\mathcal{G}(u)+\\
&+\sum_{l\in L_4}\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname*{res}_{u=-b_l-k}\mathcal{G}(u)+\\
&+\sum_{l\in L_5}\sum_{k=\overline{r_l}+1}^{\infty}\operatorname*{res}_{u=-b_l-k}\mathcal{G}(u). \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

Теперь мы собственно посчитаем вычеты $\mathcal{G}(u)$. Все рассматриваемые полюса простые. Используя известную формулу для вычисления простых полюсов, имеем:

$$\operatorname*{res}_{u=-b_l-k} \mathcal{G}(u) = \lim_{u \to -b_l-k} (u+b_l+k)\mathcal{G}(u) =$$

$$= \frac{B^+_{>l<}(-b_l-k)A^+(-b_l-k)}{A^-(-b_l-k)B^-(-b_l-k)} z^{b_l+k} \operatorname*{res}_{u=-b_l-k} \Gamma(b_l+u) =$$

$$= \frac{B^+_{>l<}(-b_l-k)A^+(-b_l-k)}{A^-(-b_l-k)B^-(-b_l-k)} z^{b_l+k} \frac{(-1)^k}{k!},$$

где $-b_l-k$ - одна из точек из (1.7). Покажем теперь, что суммы из (1.7) могут быть переписаны в виде, аналогичном [5]. Используя стандартные формулы для Γ-функции, имеем:

$$A^+(-b_l-k) = \prod_{h=1}^{n} \Gamma(1-a_h+b_l+k) =$$

$$= \prod_{h=1}^{n} \Gamma(1-a_h+b_l)(1-a_h+b_l)_k = A^+(-b_l) \prod_{h=1}^{n} (1-a_h+b_l)_k;$$

$$B^-(-b_l-k) = \prod_{h=m+1}^{q} \Gamma(1-b_h+b_l+k) =$$

$$= \prod_{h=m+1}^{q} \Gamma(1-b_h+b_l)(1-b_h+b_l)_k = B^-(-b_l) \prod_{h=1}^{n} (1-a_h+b_l)_k;$$

$$B^+_{>l<}(-b_l-k) = \prod_{\substack{h=1\\h\neq l}}^{m} \Gamma(b_h-b_l-k) =$$

$$= \prod_{\substack{h=1\\h\neq l}}^{m} (-1)^k \frac{\Gamma(b_h-b_l)}{(1-b_h+b_l)_k} = B^+_{>l<}(-b_l)(-1)^{k(m-1)} \prod_{\substack{h=1\\h\neq l}}^{m} (1-b_h+b_l)_k^{-1};$$

$$A^-(-b_l-k) = \prod_{h=n+1}^{p} \Gamma(a_h-b_l-k) =$$

$$= \prod_{h=n+1}^{p} (-1)^k \frac{\Gamma(a_h-b_l)}{(1-a_h+b_l)_k} = A^-(-b_l)(-1)^{k(p-n)} \prod_{h=n+1}^{p} (1-a_h+b_l)_k^{-1};$$

т.е. полюса $\mathcal{G}(u)$ могут быть переписаны в виде:

$$\operatorname*{res}_{u=-b_l-k} \mathcal{G}(u) = \frac{B^+_{>l<}(-b_l)A^+(-b_l)}{B^-(-b_l)A^-(-b_l)} z^{b_l} \times$$

$$\times \frac{\prod\limits_{h=1}^{n} (1-a_h+b_l)_k \prod\limits_{h=n+1}^{p} (1-a_h+b_l)_k}{\prod\limits_{\substack{h=1\\h\neq l}}^{m} (1-b_h+b_l)_k \prod\limits_{h=1}^{n} (1-a_h+b_l)_k} \frac{\left((-1)^{p-m-n} z\right)^k}{k!} =$$

$$= \frac{B^+_{>l<}(-b_l)A^+(-b_l)}{B^-(-b_l)A^-(-b_l)} z^{b_l} \frac{\prod\limits_{h=1}^{p}(1-a_h+b_l)_k}{\prod\limits_{\substack{h=1\\h\neq l}}^{q}(1-b_h+b_l)_k} \frac{((-1)^{p-m-n}z)^k}{k!}. \qquad (1.8)$$

Произведем замену индекса суммирования в сумме по множеству L_5 в (1.7), одновременно подставляя (1.8):

$$\sum_{l\in L_5}\sum_{\overline{r_l}+1}^{\infty} \frac{B^+_{>l<}(-b_l-k)A^+(-b_l-k)}{A^-(-b_l-k)B^-(-b_l-k)} z^{b_l+k}\frac{(-1)^k}{k!} =$$

$$= \sum_{l\in L_5} \frac{B^+_{>l<}(-b_l)A^+(-b_l)}{B^-(-b_l)A^-(-b_l)} z^{b_l} \sum_{k=\overline{r_l}+1}^{\infty} \frac{\prod\limits_{h=1}^{p}(1-a_h+b_l)_k}{\prod\limits_{\substack{h=1\\h\neq l}}^{q}(1-b_h+b_l)_k} \frac{((-1)^{p-m-n}z)^k}{k!} =$$

$$= \sum_{l\in L_5} \frac{B^+_{>l<}(-b_l)A^+(-b_l)}{B^-(-b_l)A^-(-b_l)} z^{b_l} \frac{\prod\limits_{h=1}^{p}\frac{\Gamma(1-a_h+b_l+\overline{r_l}+1)}{\Gamma(1-a_h+b_l)}}{\prod\limits_{\substack{h=1\\h\neq l}}^{q}\frac{\Gamma(1-b_h+b_l+\overline{r_l}+1)}{\Gamma(1-b_h+b_l)}} \frac{((-1)^{p-m-n}z)^{\overline{r_l}+1}}{(\overline{r_l}+1)!}\times$$

$$\times \sum_{k^*=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{h=1}^{p}(1-a_h+b_l+\overline{r_l}+1)_{k^*}}{\prod\limits_{\substack{h=1\\h\neq l}}^{q}(1-b_h+b_l+\overline{r_l}+1)_{k^*}} \frac{(1)_{k^*}}{(1+\overline{r_l}+1)_{k^*}} \frac{((-1)^{p-m-n}z)^{k^*}}{k^*!} =$$

$$= \sum_{l\in L_5} \frac{B^+_{>l<}(-b_l)A^+(-b_l-\overline{r_l}-1)}{B^-(-b_l-\overline{r_l}-1)A^-(-b_l)} \frac{\prod\limits_{h=n+1}^{p}(1-a_h+b_l)_{\overline{r_l}+1}}{\prod\limits_{\substack{h=1\\h\neq l}}^{q}(1-b_h+b_l)_{\overline{r_l}+1}} \frac{(-1)^{(\overline{r_l}+1)(p-m-n)}z^{b_l+\overline{r_l}+1}}{(\overline{r_l}+1)!}\times$$

$$\times {}_{p+1}F_q\left[\begin{array}{lll} 2+b_l+\overline{r_l}-a_1, & \ldots, & 2+b_l+\overline{r_l}-a_p, 1; \\ 2+b_l+\overline{r_l}-b_1, & \ldots,*,\ldots, & 2+b_l+\overline{r_l}-b_q, \overline{r_l}+2; \end{array} (-1)^{p-m-n}z\right].$$

Окончательно, подставляя (1.8) в (1.7) G-функция может быть вычислена следующим образом:

$$G^{m,n}_{p,q}(z) = \sum_{l\in L_2} \frac{B^+_{>l<}(-b_l)A^+(-b_l)}{B^-(-b_l)A^-(-b_l)} z^{b_l} \sum_{k=0}^{r_l-1} \frac{\prod\limits_{h=1}^{p}(1-a_h+b_l)_k}{\prod\limits_{\substack{h=1\\h\neq l}}^{q}(1-b_h+b_l)_k} \frac{((-1)^{p-m-n}z)^k}{k!} +$$

$$+ \sum_{l\in L_3} \frac{B^+_{>l<}(-b_l)A^+(-b_l)}{B^-(-b_l)A^-(-b_l)} z^{b_l} \sum_{k=\overline{r_l}+1}^{r_l-1} \frac{\prod\limits_{h=1}^{p}(1-a_h+b_l)_k}{\prod\limits_{\substack{h=1\\h\neq l}}^{q}(1-b_h+b_l)_k} \frac{((-1)^{p-m-n}z)^k}{k!} +$$

$$+ \sum_{l\in L_4} \frac{B^+_{>l<}(-b_l)A^+(-b_l)}{B^-(-b_l)A^-(-b_l)} z^{b_l}\times$$

$$\times {}_pF_{q-1}\left[\begin{array}{lll} 1+b_l-a_1, & \ldots, & 1+b_l-a_p; \\ 1+b_l-b_1, & \ldots,*,\ldots, & 1+b_l-b_q; \end{array} (-1)^{p-m-n}z\right]+$$

$$+\sum_{l\in L_5}\frac{B^+_{>l<}(-b_l)A^+(-b_l-\overline{r_l}-1)}{B^-(-b_l-\overline{r_l}-1)A^-(-b_l)}\frac{\prod\limits_{h=n+1}^{p}(1-a_h+b_l)_{\overline{r_l}+1}}{\prod\limits_{\substack{h=1\\h\neq l}}^{q}(1-b_h+b_l)_{\overline{r_l}+1}}\frac{(-1)^{(\overline{r_l}+1)(p-m-n)}z^{b_l+\overline{r_l}+1}}{(\overline{r_l}+1)!}\times$$

$$\times {}_{p+1}F_q\left[\begin{array}{lll} 2+b_l+\overline{r_l}-a_1, & \ldots, & 2+b_l+\overline{r_l}-a_p,1; \\ 2+b_l+\overline{r_l}-b_1, & \ldots,*,\ldots, & 2+b_l+\overline{r_l}-b_q,\overline{r_l}+2; \end{array} (-1)^{p-m-n}z\right].$$

1.3. Полюса произвольного порядка

1.3.1. Вычисление полюсов

Рассмотрим теперь случай произвольного сочетания параметров G-функции (1.4) ($p\leq q$) с единственным сохраненным ограничением, что полюса $B^+(u)$ и $A^+(u)$ разделимы (не совпадают). Мы снова опишем алгоритм построения множеств точек, в которых функция $\mathcal{G}$ имеет полюса "одного типа" (мы будем говорить, что некоторые два полюса имеют один и тот же тип, если в них имеют полюса равное количество Г-функций из B^+, A^- и B^-, ниже будет дано более формальное определение типа полюса) и вычисления значений вычетов в этих точках.

Снова начнем с рассмотрения функции $\Gamma(b_1+u)$. Введем обозначения для следующих множеств индексов: множество $L_1=\{1\}\cup\{l|2\leq l\leq m, b_l-b_1\in\mathbf{Z}\}$, где $\mathbf{Z}$ - множество целых чисел, другими словами, множество L_1 состоит из индексов l, таких что $\Gamma(b_1+u)$ и $\Gamma(b_l+u)$ имеют совпадающие полюса. Затем, по всем $l\in L_1$ мы выбираем $b^{1-}=\min\limits_{l\in L_1}b_l$ и $b^{1+}=\max\limits_{l\in L_1}b_l$. Очевидно, все полюса произведения $\prod\limits_{l\in L_1}\Gamma(b_l+u)$ (возможно разных порядков) расположены в точках $-b^{1-},-b^{1-}-1,-b^{1-}-2,\ldots$ Далее рассмотрим уничтожения полюсов этого произведения с полюсами знаменателя $\mathcal{G}$: обозначим $I_1=\{i|n+1\leq i\leq p, a_i-b^{1-}\in\mathbf{Z}\}$ и $J_1=\{j|m+1\leq j\leq q, b_j-1-b^{1-}\in\mathbf{N_0}\}$, т.е. I_1 (J_1) - это множество индексов i (j), таких что $\Gamma(a_i+u)$ имеет полюса в некоторых из точек $-b^{1-},-b^{1-}-1,-b^{1-}-2,\ldots$ ($\Gamma(1-b_j-u)$ имеет полюс в точке $-b^{1-}$ и, возможно, в некоторых из точек $-b^{1-}-1,-b^{1-}-2,\ldots$). Мы будем использовать обозначения:

$$a_{1+}=\begin{cases}\max\limits_{i\in I_1}a_i, & I_1\neq\emptyset\\ -\infty, & I_1=\emptyset\end{cases}\quad\text{и}\quad b_{1+}=\begin{cases}\max\limits_{j\in J_1}b_j, & J_1\neq\emptyset\\ b^{1-}, & J_1=\emptyset\end{cases}. \tag{1.9}$$

Пусть кроме того $b_1^+ = \max\{b^{1+}, a_{1+}, b_{1+}\}$. Теперь для каждой из точек $-b^{1-} - k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ несложно построить множества $L_{1,k} \subset L_1$, $I_{1,k} \subset I_1$, $J_{1,k} \subset J_1$, такие что $L_{1,k} = \{l | l \in L_1, b^{1-} + k - b_l \in \mathbf{N_0}\}$ (т.е. множество $L_{1,k}$ состоит из таких индексов l, что $\Gamma(b_l + u), 1 \le l \le m$ имеет полюс в точке $-b^{1-} - k$), $I_{1,k} = \{i | i \in I_1, b^{1-} + k - a_i \in \mathbf{N_0}\}$ ($\Gamma(a_i + u), n + 1 \le i \le p$ имеет полюс в $-b^{1-} - k$), $J_{1,k} = \{j | j \in J_1, b_j - 1 - b^{1-} - k \in \mathbf{N_0}\}$ ($\Gamma(1 - b_j - u), m + 1 \le j \le q$ имеет полюс в точке $-b^{1-} - k$). Тогда функция $\mathcal{G}$ имеет полюс в точке $-b^{1-} - k$ тогда и только тогда, когда $|L_{1,k}| - |I_{1,k}| - |J_{1,k}| = O_{1,k} > 0$, где $|N|$ - число элементов множества N, $O_{1,k}$ - порядок полюса функции $\mathcal{G}$ в точке $-b^{1-} - k$. Очевидно,

$$L_{1,(b_1^+ - b^{1-})} = L_{1,(b_1^+ - b^{1-}+1)} = L_{1,(b_1^+ - b^{1-}+2)} = \ldots \equiv L_{1,\infty},$$

$$I_{1,(b_1^+ - b^{1-})} = I_{1,(b_1^+ - b^{1-}+1)} = I_{1,(b_1^+ - b^{1-}+2)} = \ldots \equiv I_{1,\infty},$$

$$J_{1,(b_1^+ - b^{1-})} = J_{1,(b_1^+ - b^{1-}+1)} = J_{1,(b_1^+ - b^{1-}+2)} = \ldots = \emptyset,$$

т.е. в точках $-b_1^+, -1 - b_1^+, -2 - b_1^+, \ldots$ поведение функции $\mathcal{G}$ определяется одним и тем же набором Γ-функций из ее числителя и знаменателя. Если $O_{1,\infty} \equiv |L_{1,\infty}| - |I_{1,\infty}| > 0$ то $\mathcal{G}$ имеет полюса порядка $O_{1,\infty}$ в этих точках. В связи с вышесказанным мы приведем

Определение 1.1. *Типом полюса порядка $O_{1,k}$ в точке $u_p = -b^{1-} - k$ мы назовем упорядоченную пару чисел $(|I_{1,k}|, |J_{1,k}|)$.*

Например, фраза "$\mathcal{G}$ имеет в точке $u_p = -b^{1-} - k$ простой полюс типа $(0, 1)$" значит, что в этой точке функция A^- полюсов не имеет, функция B^- имеет простой полюс и функция B^+ имеет полюс второго порядка. Однако тип полюса не указывает, какие именно Γ-функции - сомножители функций A^-, B^- и B^+ имеют полюс в этой точке. Эта информация содержится в множествах $M_{1,k} = \{L_{1,k}, I_{1,k}, J_{1,k}\}$, которые однозначно определяют поведение функции $\mathcal{G}$ в точках $-b^{1-} - k$. Как следует из приведенных выше рассуждений, для всех $k \ge b_1^+ - b^{1-}$, $M_{1,k} = M_{1,\infty} \equiv \{L_{1,\infty}, I_{1,\infty}, \emptyset\}$. Также может оказаться, что некоторые из множеств $M_{1,k}$, $0 \le k < b_1^+ - b^{1-}$ равны (нетрудно видеть, что равные множества $M_{1,k}$ образуют "цепочки", т.е. если $M_{1,k_1} = M_{1,k_2}, k_1 < k_2$, то $M_{1,k_1} = M_{1,k_1+1} = \ldots = M_{1,k_2}$ и случай $M_{1,k_1} = M_{1,k_2} \ne M_{1,k_3}, k_1 < k_3 < k_2$ невозможен), т.е. в некоторых из точек $-b^{1-}, -b^{1-} - 1, -b^{1-} - 2, \ldots$ поведение $\mathcal{G}$ определяется одним и тем же набором Γ-функций. Тогда формула вычисления вычета $\mathcal{G}$ в этих точках также будет точно той же самой. Для получения общей формулы суммирования вычетов мы разобьем последовательность точек $-b^{1-}, -b^{1-} - 1, -b^{1-} - 2, \ldots$ на подпоследовательности $P_{1,\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \overline{\alpha}_1$ точек, в которых одни и те же Г-функции имеют полюса, т.е. точки $-b^{1-}-k_1$ и $-b^{1-}-k_2$ принадлежат одному и тому же множеству $P_{1,\alpha} \iff M_{1,k_1}=M_{1,k_2}$. Если для всех $k=0,1,\dots,\ O_{1,k}\le 0$, т.е. если все полюса $-b^{1-},-b^{1-}-1,-b^{1-}-2,\dots$ уничтожились, $\overline{\alpha}_1=0$ и $\mathcal{G}$ не имеет полюсов в этих точках.

Далее мы вычисляем $l_2,\ 2\le l_2\le m$, такое что $l_2=\min\limits_{\substack{l\notin L_1\\ 2\le l\le m}} l$ и повторяем все шаги приведенного выше алгоритма для b_{l_2}, получая в итоге конечный набор множеств $P_{l_2,\alpha},\ \alpha=1,2,\dots,\overline{\alpha}_{l_2},\overline{\alpha}_{l_2}\in\mathbf{N_0}$.

Аналогично весь алгоритм должен быть повторен для всех $l:1\le l\le m$, т.е. пока не будет получено разбиение множества $\{b_1,b_2,\dots,b_m\}=L_1\cup L_{l_2}\cup\ldots\cup L_{l_f}$, где f - количество подмножеств L_{l_h} (по построению $L_{l_h}\cap L_{l_g}=\emptyset,\ l_h\ne l_g,\ h,g\in\{1,2,\dots,f\},\ l_1\equiv 1$), и не будут получены все $P_{l_h,\alpha},\ h=1,\dots,f,\ \alpha=1,\dots,\overline{\alpha}_{l_h}$. Тогда окончательно мы можем переписать искомую G-функцию в виде суммы вычетов:

$$G^{m,n}_{p,q}(z)=\sum_{h=1}^{f}\sum_{\alpha=1}^{\overline{\alpha}_{l_h}}\sum_{u_p\in P_{l_h,\alpha}}\operatorname*{res}_{u=u_p}\mathcal{G}(u). \tag{1.10}$$

Здесь, как обычно, мы подразумеваем, что при $\overline{\alpha}_{l_h}=0,\ \sum\limits_{\alpha=1}^{0}=0$.

1.3.2. Вычисление вычетов

Простые полюса. Случай простых полюсов подынтегральной функции уже был рассмотрен нами отдельно ранее. Здесь мы лишь проиллюстрируем применение общего алгоритма для этого случая. Имеем $L_l=\{l\},\ l=1,2,\dots,m$, т.е. $\nexists l_1\ne l_2: b_{l_1}-b_{l_2}\in\mathbf{Z}$, что и гарантирует нам наличие у функции $\mathcal{G}(u)$ полюсов порядка не выше первого. Найдем значения констант: $b^{l-}=b^{l+}=b_l$. Пусть для некоторого $k\in\mathbf{N_0}$ $I_{l,k}=J_{l,k}=\emptyset$, тогда $\mathcal{G}(u)$ имеет простой полюс в точке $u_p=-b_l-k$, вычет в этой точке равен

$$\operatorname*{res}_{u=u_p}\mathcal{G}(u)=\frac{B^{+}_{>l<}(-b_l-k)A^{+}(-b_l-k)}{B^{-}(-b_l-k)A^{-}(-b_l-k)}z^{b_l+k}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Очевидно, если хотя бы одно из множеств $I_{l,k}$ и $J_{l,k}$ не пусто, то $\mathcal{G}(u)$ не имеет полюса в этой точке. На самом деле, если $I_{l,k}\ne\emptyset$ для некоторого $k\in\mathbf{N_0}$ (или, другими словами, если $I_l\ne\emptyset$), тогда $\mathcal{G}(u)$ имеет не более, чем конечное число полюсов в точках $u_p=-b_l-k,\ k=0,1,\dots,a_{l-}-b_l-1$, где $a_{l-}=\min\limits_{i\in I_l}a_i$. Иначе, если $I_{l,k}=\emptyset$ для всех $k=0,1,2,\dots$ (т.е. $I_l=\emptyset$) и $J_l\ne\emptyset$, то конечное число полюсов числителя $\mathcal{G}(u)$ уничтожаются с полюсами ее знаменателя в точках $u=-b_l-k,\ k=0,1,\dots,b_{l-}-b_l-1$.

В общем случае, как для пустых, так и для непустых множеств $I_{l,k}$ и $J_{l,k}$, пользуясь общим определением b_{l+}, (1.9), определив также

$$a_{l-} = \begin{cases} \min\limits_{i\in I_l} a_i, & I_l \neq \emptyset \\ +\infty, & I_l = \emptyset \end{cases}$$

и по аналогии с пунктом 1.2 $\overline{r_l} = b_{l+} - b_l - 1$, $\underline{r_l} = a_{l-} - b_l$, вклад цепочки точек $u = -b_l, -b_l - 1, \ldots$ в результирующее значение G-функции равен

$$\sum_{k=\overline{r_l}+1}^{\underline{r_l}-1} \operatorname*{res}_{u=-b_l-k} \mathcal{G}(u).$$

При определенных значениях коэффициентов G-функции эта сумма может быть равна нулю. Окончательно

$$G_{p,q}^{m,n}(z) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=b_{l+}-b_l}^{a_{l-}-b_l-1} \frac{B^+_{>l<}(-b_l-k)A^+(-b_l-k)}{B^-(-b_l-k)A^-(-b_l-k)} z^{b_l+k} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Еще раз напомним, что случай однократных полюсов подынтегральной функции был подробно обсужден выше.

Полюса второго порядка. Рассмотрим теперь случай $L_{l_1} = \{l_1, l_2\}$, $0 \leq l_1, l_2 \leq m$. Пусть для определенности $b^{l_1-} = \min\{b_{l_1}, b_{l_2}\} = b_{l_1}$, т.е. $b_{l_1} \leq b_{l_2}$. Вычеты в точках $-b_{l_1}, -b_{l_1}-1, \ldots, -b_{l_2}+1$ вычисляются точно так же как и в случае простых полюсов, а именно, для каждого $k = 0, 1, \ldots, b_{l_2} - b_{l_1} - 1$ мы проверяем множества $I_{l_1,k}$ и $J_{l_1,k}$. И при условии, что они оба пусты (простые полюса типа (0,0)), вычеты в них вычисляются по формуле:

$$\operatorname*{res}_{u=-b_{l_1}-k} \mathcal{G}(u) = \frac{B^+_{>l_1<}(-b_{l_1}-k)A^+(-b_{l_1}-k)}{B^-(-b_{l_1}-k)A^-(-b_{l_1}-k)} z^{b_{l_1}+k} \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{1.11}$$

Далее рассмотрим точки $-b_{l_2} - k$, $k = 0, 1, \ldots$ в которых функция $B^+(u)$ имеет полюса второго порядка и одна из функций $B^-(u)$ и $A^-(u)$ имеет простой полюс. В этом случае $|L_{l_1,b_{l_2}-b_{l_1}+k}| = 2$, $|I_{l_1,b_{l_2}-b_{l_1}+k}| + |J_{l_1,b_{l_2}-b_{l_1}+k}| = 1$. Тогда вычеты в этих точках вычисляются следующим образом:

случай (i): простые полюса типа (0,1), т.е. $|J_{l_1,b_{l_2}-b_{l_1}+k}| = 1$, $|I_{l_1,b_{l_2}-b_{l_1}+k}| = 0$, пусть для определенности $J_{l_1,b_{l_2}-b_{l_1}+k} = \{j\}$, то есть $b_j - b_{l_2} - 1 \in \mathbf{N_0}$, тогда

$$\operatorname*{res}_{u=-b_{l_2}-k} \mathcal{G}(u) = \frac{B^+_{>l_1,l_2<}(-b_{l_2}-k)A^+(-b_{l_2}-k)}{B^-_{>j<}(-b_{l_2}-k)A^-(-b_{l_2}-k)} z^{b_{l_2}+k} \operatorname*{res}_{u=-b_{l_2}-k} \frac{\Gamma(b_{l_1}+u)\Gamma(b_{l_2}+u)}{\Gamma(1-b_j-u)} =$$

$$= \frac{B^+_{>l_1,l_2<}(-b_{l_2}-k)A^+(-b_{l_2}-k)}{B^-_{>j<}(-b_{l_2}-k)A^-(-b_{l_2}-k)} z^{b_{l_2}+k} \operatorname*{res}_{u=-b_{l_2}-k} \frac{\Gamma(b_{l_2}+u)\Gamma(b_j+u)}{\Gamma(1-b_{l_1}-u)} (-1)^{b_j-b_{l_1}} =$$

$$= \frac{B^+_{>l_1,l_2<}(-b_{l_2}-k)A^+(-b_{l_2}-k)}{B^-_{>j<}(-b_{l_2}-k)A^-(-b_{l_2}-k)} z^{b_{l_2}+k} \frac{\Gamma(b_j-b_{l_2}-k)}{(b_{l_2}-b_{l_1}+k)!} \frac{(-1)^{b_j-b_{l_1}+k}}{k!}; \quad (1.12)$$

случай (ii): простые полюса типа (1,0), т.е. $|J_{l_1,b_{l_2}-b_{l_1}+k}|=0, |I_{l_1,b_{l_2}-b_{l_1}+k}|=1$, пусть $I_{l_1,b_{l_2}-b_{l_1}+k}=\{i\}$ и $a_i-b_{l_2}\in\mathbf{Z}$, тогда

$$\operatorname*{res}_{u=-b_{l_2}-k}\mathcal{G}(u) = \frac{B^+_{>l_1,l_2<}(-b_{l_2}-k)A^+(-b_{l_2}-k)}{B^-(-b_{l_2}-k)A^-_{>i<}(-b_{l_2}-k)} z^{b_{l_2}+k} \operatorname*{res}_{u=-b_{l_2}-k} \frac{\Gamma(b_{l_1}+u)\Gamma(b_{l_2}+u)}{\Gamma(a_i+u)} =$$

$$= \frac{B^+_{>l_1,l_2<}(-b_{l_2}-k)A^+(-b_{l_2}-k)}{B^-(-b_{l_2}-k)A^-_{>i<}(-b_{l_2}-k)} z^{b_{l_2}+k} \times$$

$$\times \frac{(-1)^{b_{l_1}-b_{l_2}-k}}{(b_{l_2}-b_{l_1}+k)!} \times \begin{cases} \dfrac{1}{(-k)_{a_i-b_{l_2}}},\ 0\le a_i-b_{l_2}, \\ (a_i-b_{l_2}-k)_{b_{l_2}-a_i},\ a_i-b_{l_2}<0. \end{cases} \quad (1.13)$$

В завершение мы подсчитаем вычеты функции $\mathcal{G}(u)$ в точках, в которых $B^+(u)$ имеет полюса второго порядка и Γ-функции из знаменателя $\mathcal{G}(u)$ не имеют полюсов (полюса второго порядка типа (0,0)). Имеем $|L_{l_1,b_{l_2}-b_{l_1}+k}|=2, |I_{l_1,b_{l_2}-b_{l_1}+k}|=|J_{l_1,b_{l2}-b_{l_1}+k}|=0$. Приведем известную формулу для вычисления вычета функции $f(u)$ в полюсе порядка n:

$$\operatorname*{res}_{u=u_p} f(u) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{u\to u_p}\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\left((u-u_0)^n f(u)\right). \quad (1.14)$$

Следовательно вычеты могут быть посчитаны следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{u=-b_{l_2}-k}\mathcal{G}(u) = \lim_{u\to -b_{l_2}-k}\frac{d}{du}[(u+b_{l_2}+k)^2\mathcal{G}(u)] =$$

$$= \frac{B^+_{>l_1,l_2<}(-b_{l_2}-k)A^+(-b_{l_2}-k)}{B^-(-b_{l_2}-k)A^-(-b_{l_2}-k)} z^{b_{l_2}+k} \times$$

$$\times \left\{ \ln z - \psi(k+1) - \psi(k_1+1) - \sum_{\substack{h=1\\ h\ne l_1, h\ne l_2}}^{m} \psi(b_h-b_{l_2}-k) + \sum_{h=1}^{n}\psi(1-a_h+b_{l_2}+k) - \right.$$

$$\left. - \sum_{h=m+1}^{q}\psi(1-b_h+b_{l_2}+k) + \sum_{h=n+1}^{p}\psi(a_h-b_{l_2}-k) \right\} \frac{(-1)^{k+k_1}}{k!k_1!}, \quad (1.15)$$

где $k_1 = k + b_{l_2} - b_{l_1}$.

Таким образом нами доказана

Теорема 1.1. *Пусть дана G-функция Мейера порядка (m,n,p,q)* $G^{m,n}_{p,q}(z|(a_p);(b_q))$ *(1.4), такая что для всех* $i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n,\ a_j-b_i\ne k,\ k=1,2,\ldots$ *Эта функция в области своей аналитичности может быть разложена в ряд вычетов подынтегральной функции интеграла (1.4) по формуле (1.10). При этом значения вычетов для случаев простых полюсов функции* $\mathcal{G}$ *типов (0,0), (0,1) и (1,0) даются формулами (1.11), (1.12) и (1.13)* *соответственно, а для случая полюсов второго порядка типа (0,0) - по формуле (1.15). Все обозначения, использованные в этих формулах, объяснены в тексте главы.*

Значения вычетов функции $\mathcal{G}$ в точках, где функция $B^{+}(u)$ имеет полюса порядка три и выше могут быть вычислены по известной формуле 1.14. При этом, например, если функция $B^{+}(u)$ имеет полюса порядка не выше третьего, общая формула должна содержать выражения для вычетов $\mathcal{G}$ в простых полюсах типов (0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1) и (2,0); в полюсах второго порядка типов (0,0), (0,1) и (1,0) и в полюсах третьего порядка типа (0,0), итого 10 различных формул вычисления вычетов. При этом некоторые из них, как, например, (1.13) могут в свою очередь порождать несколько формул. Что и обуславливает сложность вывода явной формулы, содержащей все возможные случаи сочетаний параметров G-функции.

Глава 2

Об одном интеграле с функцией Бесселя в ядре

2.1. Введение

В задачах теории упругости о нагружении/равновесии бесконечных пластин на упругом полупространстве [27], [28] встречаются интегралы вида:

$$\omega_s^\nu(x) = \int_0^\infty \frac{y^s}{1+y^3} J_\nu(xy)dy, \tag{2.1}$$

где $J_\nu(x)$ - функция Бесселя первого типа. В частности при действии на пластину сосредоточенной силы P в полярной системе координат с началом в точке приложения силы реактивное давление $p(\xi)$ и прогиб $w(\xi)$ даются выражениями

$$p(\xi) = \frac{P}{2\pi l^2}\int_0^\infty \frac{y}{1+y^3} J_0(\xi y)dy = \frac{P}{2\pi l^2}\omega_1^0(\xi), \tag{2.2}$$

$$w(\xi) = \frac{Pl^2}{2\pi D}\int_0^\infty \frac{1}{1+y^3} J_0(\xi y)dy = \frac{Pl^2}{2\pi D}\omega_0^0(\xi), \tag{2.3}$$

где $l = (2D(1-\sigma^2)/E)^{1/3}$, σ - коэффициент Пуассона, E - модуль упругости, $\xi = r/l$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ - радиальная переменная. D - изгибная жесткость пластинки, дифференциальное уравнение упругой поверхности которой (уравнение Кармана) выглядит следующим образом:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = q - p,$$

где q-нагрузка на пластинку, $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Решение (2.2)-(2.3) до Коренева было получено С. Войновским-Кригером в 1932г.; эта задача, а также ряд других важных и более сложных задач о плите на упругом слое и т.д. были решены О.Я. Шехтер [60] и [61], которая составила также необходимые для расчета таблицы. Упомянем также статью [110], в которой приведены некоторые численные методы расчета функций (2.2) и (2.3), даны таблицы результатов расчетов.

Как следует из сказанного, в приложениях аргумент $\omega_s^\nu(x)$ - радиальная переменная и, следовательно, $x > 0$ действительное. Мы главным образом также будем работать в действительной области, однако, где возможно, мы будем говорить об аналитическом продолжении рассматриваемой функции.

В настоящей работе мы получим различные представления интеграла (2.1). Во втором параграфе мы приведем некоторые базовые свойства функции (2.1); в параграфах 2.3, 2.4 и 2.5 мы изучим различные частные случаи пар значений параметров ν и s. Мы получим представления интеграла через G-функцию Мейера, H-функцию Фокса и в виде ряда гипергеометрического типа. Будет показано, что, хотя случай, рассмотренный в параграфе 2.3 довольно прост, случаи из параграфов 2.4 и 2.5 принципиально сложнее. В этих двух последних параграфах для получения разложения функции в ряд были использованы два разных подхода - метод малого параметра и метод теории вычетов. Наконец, в параграфе 2.6 мы рассмотрим все возможные пары значений параметров ν и s и получим формулы разложения G- (H-) функции в ряд, используя методы и классификацию из первой главы. В параграфе 2.7 мы изучим асимптотическое поведение функции при больших значениях аргумента. В восьмом параграфе мы обсудим различные методы численного расчета функции - по формуле (2.1), используя стандартные пакеты численных вычислений, суммированием нескольких первых членов ряда и по асимптотическим формулам. Для наглядности сравнения полученных результатов построены графики. Результаты этой главы были анонсированы в кратком сообщении [39].

2.2. Некоторые базовые свойства

В данном параграфе мы получим некоторые простейшие свойства функции $\omega_s^\nu(x)$, вытекающие непосредственно из ее определения.

2.2.1. Сходимость

Для наших целей нам понадобятся некоторые общеизвестные свойства функции Бесселя первого типа $J_\nu(z)$. Они могут быть найдены, например, в [6], [47], [7].

1) Асимптотическое поведение функции Бесселя в нуле при $\nu \neq 0$:

$$J_\nu(z) \sim \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \ z \to 0, \tag{2.4}$$

при $\nu = 0, J_0(0) = 1$.

2) Справедливы следующие неравенства ([7]) для действительных $\nu > -1/2$, $x \in \mathbf{R}, \mathbf{z} \in \mathbf{Z}$:

$$\begin{cases} |J_\nu(z)| \leq \dfrac{|z^\nu|}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} e^{|\mathrm{Im}\ z|}, & \nu > -1/2; \\ |J_\nu(x)| \leq 1, & \nu \geq 0; \\ |J_\nu(x)| \leq 1/\sqrt{2}, & \nu \geq 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

3) При $x \to \infty$ справедлива следующая известная оценка:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O(x^{-3/2}). \tag{2.6}$$

4) Интеграл

$$\int\limits_0^\infty y^a J_\mu(y) dy$$

сходится при $-\mathrm{Re}\ \mu - 1 < \mathrm{Re}\ a < 1/2$. Здесь левая часть неравенства обеспечивает сходимость в нуле и правая - на бесконечности. Интеграл (2.1) может быть переписан в виде (x действительное):

$$\omega_s^\nu(x) = x^{2-s} \int\limits_0^\infty \frac{y^s}{x^3+y^3} J_\nu(y) dy. \tag{2.7}$$

Асимптотики рациональной функции в этом интеграле при $y \to 0$ и $y \to \infty$ при фиксированном x имеют вид:

$$\frac{y^s}{x^3+y^3} \sim \frac{y^s}{x^3}, \ y \to 0, \ x \neq 0,$$

$$\frac{y^s}{x^3+y^3} \sim y^{s-3}, \ y \to \infty.$$

Эти соотношения вместе с неравенствами (2.5) доказывают следующее утверждение:

Лемма 2.1. *Пусть $x > 0$, тогда интеграл (2.1) сходится при*

$$-Re\ \nu - 1 < Re\ s < 7/2, \tag{2.8}$$

причем при $-1 - \nu < Re\ s < 5/2$ интеграл сходится абсолютно (ν - действительное).

2.2.2. Рекуррентные соотношения

Функция Бесселя первого типа J_ν удовлетворяет следующим известным рекуррентным соотношениям:

$$2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) \tag{2.9}$$

и

$$\frac{2\nu}{z}J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z), \tag{2.10}$$

из которых просто получить следующие соотношения:

$$\frac{2\nu}{x}\omega_s^\nu(x) = \omega_{s+1}^{\nu-1}(x) + \omega_{s+1}^{\nu+1}(x)$$

и

$$2\left(\omega_s^\nu(x)\right)' = \omega_{s+1}^{\nu-1}(x) - \omega_{s+1}^{\nu+1}(x),$$

причем последнее уравнение выполняется, когда дифференцирование под знаком интеграла разрешено.

Теперь мы перейдем собственно к вычислению интеграла. Для простоты рассмотрим сначала несколько частных случаев пар значений ν и s.

2.3. Случай $\nu = 0, s = 1/2$

Как скоро станет понятно, это один из простых случаев. Интеграл в этом случае выглядит следующим образом:

$$\omega_{1/2}^0(x) = \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{y}}{1+y^3}J_0(xy)dy.$$

Произведем замену переменной по формуле $t = \dfrac{1}{y}$ для приведения интеграла к виду свертки Меллина:

$$\omega_{1/2}^0(x) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{3/2}}{1+t^3}J_0\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}$$

и применим преобразование Меллина:

$$M[\omega_{1/2}^0(x)](\sigma) = M\left[\int\limits_0^\infty \frac{t^{3/2}}{1+t^3}J_0\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}\right](\sigma) =$$

$$= M\left[\frac{t^{3/2}}{1+t^3}\right](\sigma)M[J_0(t)](\sigma) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{3}\right)2^{\sigma-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)},$$

где

$$0 < \mathrm{Re}\ \sigma < \frac{3}{2}.$$

Теперь можно применить обратное преобразование Меллина (по теореме Слейтер из [42]) и переписать функцию $\omega^0_{1/2}(x)$ в виде контурного интеграла, взятого вдоль одной из разрешенных траекторий, подробно описанных в [5]:

$$\omega^0_{1/2}(x) = \frac{1}{12\pi i}\int\limits_{L_H} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{u}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{u}{3}\right)\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{u}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-u} du.$$

Отсюда, непосредственно по определению G-функции Мейера ($G^{m,n}_{p,q}$) и H-функции Фокса ($H^{m,n}_{p,q}$) получаем следующие представления:

$$\omega^0_{1/2}(x) = \frac{1}{6}H^{2,1}_{1,3}\left[\frac{x}{2}\left|\begin{matrix}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) \\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(0,\frac{1}{2}\right)\end{matrix}\right.\right] =$$

$$= \frac{1}{6\pi}G^{5,2}_{2,7}\left(\left(\frac{x}{6}\right)^6\left|\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{3}{4} \\ 0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{4},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\end{matrix}\right.\right) = \frac{1}{6\pi}W^0_{1/2}\left(\left(\frac{x}{6}\right)^6\right).$$

Условия, гарантирующие представимость G-функции в виде суммы обобщенных гипергеометрических рядов по формуле из [5] соблюдены (в частности, никакие два из ее первых пяти нижних индексов не отличаются на целое число), следовательно, введя обозначение:

$$\Omega^0_{1/2}(z) = \frac{2\sqrt{2}}{9}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}z^{3/2}\ {}_1F_6\left[\begin{matrix}1; \\ \frac{7}{12},\frac{7}{12},\frac{11}{12},\frac{11}{12},\frac{5}{4},\frac{5}{4};\end{matrix}\ -\left(\frac{z}{6}\right)^6\right] -$$

$$-\frac{4\sqrt{2}}{2025}\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}z^{9/2}\ {}_1F_6\left[\begin{matrix}1; \\ \frac{7}{4},\frac{7}{4},\frac{17}{12},\frac{17}{12},\frac{13}{12},\frac{13}{12};\end{matrix}\ -\left(\frac{z}{6}\right)^6\right] +$$

$$+\frac{\pi}{3}\ {}_0F_5\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},1;-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right) +$$

$$+\frac{\pi}{3(2-\sqrt{3}+3^{1/4})}z^2\ {}_0F_5\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\frac{4}{3};-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right) -$$

$$-\frac{\pi}{48(2-\sqrt{3}+3^{1/4})}z^4\ {}_0F_5\left(1,\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3};-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right),$$

выводы данного параграфа могут быть сформулированы в теореме:

Теорема 2.1. *Функция $\Omega^0_{1/2}(z)$ является аналитическим продолжением функции $\omega^0_{1/2}(x)$ в комплексную область, т.е. при $x > 0$ $\omega^0_{1/2}(x) = \Omega^0_{1/2}()$.*

Напомним, что ${}_1F_6$ и ${}_0F_5$ - обобщенные гипергеометрические функции, являющиеся быстросходящимися степенными рядами с радиусом сходимости $r = \infty$.

2.4. Случай $\nu = 0, s = 1$

Этот случай принципиально сложнее, чем рассмотренный выше. Напомним, что через эту функцию выражается реактивное давление. Непосредственно из определения $\omega_1^0(x)$

$$\omega_1^0(x) = \int\limits_0^\infty \frac{y}{1+y^3} J_0(xy)dy$$

следует, что в точке $x = 0$ ее четвертая производная не существует, и поэтому эта функция не может быть разложена в ряд Тейлора в нуле. В качестве примера Dr. G. Little (Университет Манчестера, Великобритания) доказал, что в случае $\nu = 0, s = 0$ при x стремящемся к нулю вторая производная функции стремится к минус бесконечности. В общем случае, как будет показано далее, если $\nu + s$ равно целому неотрицательному числу или минус двум, в разложении функции ω_s^ν присутствует член вида:

$$x^{\alpha+\nu} \ln x \sum_{k=0}^\infty c_k x^k,$$

где $\alpha = 0, 2$ или 4 в зависимости от значения суммы $\nu + s$ (см. также параграф 2.6 пункт 4, формула (2.39) и комментарии к ней).

2.4.1. Метод малого параметра

Первые шаги алгоритма точно такие же, как и в случае $\nu = 0,\ s = 1/2$. Снова произведем ту же замену переменной:

$$\omega_1^0(x) = \int\limits_0^\infty \frac{t}{1+t^3} J_0\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t},$$

тогда

$$M[\omega_1^0(x)](\sigma) = M\left[\int\limits_0^\infty \frac{t}{1+t^3} J_0\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}\right](\sigma) =$$

$$= M\left[\frac{t}{1+t^3}\right](\sigma) M[J_0(t)](\sigma) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{\sigma}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}-\frac{\sigma}{3}\right)2^{\sigma-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)},$$

где

$$0 < \mathrm{Re}\ \sigma < \frac{3}{2}.$$

Снова применим обратное преобразование Меллина и перепишем функцию $\omega_1^0(x)$ в виде контурного интеграла:

$$\omega_1^0(x) = \frac{1}{12\pi i}\int\limits_{L_H} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{u}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}-\frac{u}{3}\right)\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{u}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-u} du. \qquad (2.11)$$

Представление интеграла через G-функцию Мейера и H-функцию Фокса также не представляет труда:

$$\omega_1^0(x) = \frac{1}{6} H_{1,3}^{2,1}\left[\frac{x}{2}\left| \begin{array}{l} \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \\ \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), \left(0,\frac{1}{2}\right), \left(0,\frac{1}{2}\right) \end{array}\right.\right] =$$

$$= \frac{1}{6\pi} G_{1,7}^{5,1}\left(\left(\frac{x}{6}\right)^6 \left| \begin{array}{l} \frac{1}{6} \\ 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3} \end{array}\right.\right) = \frac{1}{6\pi} W_1^0\left(\left(\frac{x}{6}\right)^6\right). \tag{2.12}$$

Нашей задачей является получение какого-либо “вычислимого” представления, например, в виде ряда. Однако, в этом случае это не может быть сделано по стандартным формулам, т.к. две Г-функции из числителя (2.11) имеют совпадающие полюса, что проявилось в совпадении двух из первых пяти нижних параметров G-функции из (2.12), что запрещено в [5]. Здесь имеет место так называемый логарифмический случай G-функции Мейера (H-функции Фокса), подробно изученный нами в первой главе.

Для получения требуемого разложения воспользуемся методом малого параметра, описанным в [42]. Именно, рассмотрим функцию

$$W_1^0(\rho,\varepsilon) = G_{1,7}^{5,1}\left(\rho \left| \begin{array}{l} \frac{1}{6} \\ 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}+\varepsilon, 0, \frac{1}{3} \end{array}\right.\right), \tag{2.13}$$

где $\varepsilon > 0$ - произвольный параметр. Очевидно,

$$W_1^0(\rho,0) = W_1^0(\rho).$$

Функция из (2.13) не имеет логарифмической особенности и, следовательно, может быть представлена в виде суммы обобщенных гипергеометрических рядов по известной формуле из [5]:

$$\begin{aligned} W_1^0(\rho,\varepsilon) &= 2\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}+\varepsilon\right) {}_0F_5\left(\frac{1}{3}-\varepsilon, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1; -\rho\right) - \\ &-36\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\rho^{\frac{1}{6}} {}_1F_6\left[\begin{array}{l} 1; \\ \frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{6}; \end{array} -\rho\right] + \\ &+18\pi\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}+\varepsilon\right)\rho^{\frac{1}{3}} {}_0F_5\left(\frac{2}{3}-\varepsilon, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 1; -\rho\right) + \\ &+\Gamma\left[\begin{array}{l} -\frac{2}{3}-\varepsilon, -\frac{1}{2}-\varepsilon, -\frac{1}{3}-\varepsilon, -\varepsilon, \frac{3}{2}+\varepsilon \\ \frac{4}{3}+\varepsilon, \frac{5}{3}+\varepsilon \end{array}\right]\rho^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\times \\ &\times {}_0F_5\left(1+\varepsilon, \frac{4}{3}+\varepsilon, \frac{4}{3}+\varepsilon, \frac{5}{3}+\varepsilon, \frac{5}{3}+\varepsilon; -\rho\right) - \\ &-\frac{81}{4}\pi\Gamma(\varepsilon)\rho^{\frac{2}{3}} {}_0F_5\left(1-\varepsilon, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}; -\rho\right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Обозначим слагаемые из (2.14) $A_i^\varepsilon, i = 1, \ldots, 5$ в том порядке, в котором они приведены. При ε, стремящемся к нулю, A_4^ε и A_5^ε стремятся к ∞, образуя неопределенность $\infty - \infty$. Как показано в [42], эта неопределенность устранима. Для ее раскрытия заменим функции, содержащие ε, их асимптотиками при $\varepsilon \to 0$. Вычислим сначала A_4^ε. Для этого мы разложим символа Похгаммера по формуле Тейлора из [42]:

$$(a+\varepsilon)_k = (a)_k \left(1 + \varepsilon(\psi(a+k) - \psi(a)) + O(\varepsilon^2)\right),$$

где $\psi(z)$ - логарифмическая производная Г-функции. Это выражение мы подставим в представление в виде ряда обобщенной гипергеометрической функции ${}_0F_5$ из A_4^ε согласно определению (1.2):

$$ {}_0F_5\left(1+\varepsilon, \frac{4}{3}+\varepsilon, \frac{4}{3}+\varepsilon, \frac{5}{3}+\varepsilon, \frac{5}{3}+\varepsilon; -\rho\right) = $$

$$ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1)_k \left(\frac{4}{3}\right)_k \left(\frac{4}{3}\right)_k \left(\frac{5}{3}\right)_k \left(\frac{5}{3}\right)_k} \frac{(-\rho)^k}{k!} \times $$

$$ \times \frac{1}{1 + \varepsilon\left[\psi(1+k) - \psi(1) + 2\psi\left(\frac{4}{3}+k\right) - 2\psi\left(\frac{4}{3}\right) + 2\psi\left(\frac{5}{3}+k\right) - 2\psi\left(\frac{5}{3}\right)\right] + O\left(\varepsilon^2\right)}. $$

Заменим Г-функции из A_4^ε их асимптотиками ([42]):

$$ \Gamma\left[\begin{array}{l} -\frac{2}{3}-\varepsilon, -\frac{1}{2}-\varepsilon, -\frac{1}{3}-\varepsilon, -\varepsilon, \frac{3}{2}+\varepsilon \\ \frac{4}{3}+\varepsilon, \frac{5}{3}+\varepsilon \end{array}\right] = $$

$$ = \frac{81}{4}\frac{\pi}{\varepsilon}\frac{1 - \varepsilon\left(\psi\left(-\frac{2}{3}\right) + \psi\left(-\frac{1}{2}\right) + \psi\left(-\frac{1}{3}\right) + \psi(1) - \psi\left(\frac{3}{2}\right)\right) + O\left(\varepsilon^2\right)}{1 + \varepsilon\left(\psi\left(\frac{4}{3}\right) + \psi\left(\frac{5}{3}\right)\right) + O\left(\varepsilon^2\right)}, $$

и, завершая разложение A_4^ε, выпишем асимптотику

$$ \rho^{\frac{2}{3}+\varepsilon} = \rho^{\frac{2}{3}}\left(1 + \varepsilon\ln\rho + O\left(\varepsilon^2\right)\right). $$

Перемножая все сомножители, окончательно имеем:

$$ A_4^\varepsilon = \frac{81}{4}\rho^{\frac{2}{3}}\frac{\pi}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1)_k \left(\frac{4}{3}\right)_k \left(\frac{4}{3}\right)_k \left(\frac{5}{3}\right)_k \left(\frac{5}{3}\right)_k} \frac{(-\rho)^k}{k!} \times $$

$$ \times \frac{1 + \varepsilon\left[\ln\rho - \psi\left(-\frac{2}{3}\right) - \psi\left(-\frac{1}{2}\right) - \psi\left(-\frac{1}{3}\right) - \psi(1) + \psi\left(\frac{3}{2}\right)\right] + O\left(\varepsilon^2\right)}{1 + \varepsilon\left[\psi(1+k) - \psi(1) + 2\psi\left(\frac{4}{3}+k\right) - \psi\left(\frac{4}{3}\right) + 2\psi\left(\frac{5}{3}+k\right) - \psi\left(\frac{5}{3}\right)\right] + O\left(\varepsilon^2\right)}. $$

Аналогично

$$ A_5^\varepsilon = -\frac{81}{4}\rho^{\frac{2}{3}}\frac{\pi}{\varepsilon}\left[1 + \varepsilon\psi(1) + O(\varepsilon^2)\right] \times $$

$$ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1)_k \left(\frac{4}{3}\right)_k \left(\frac{4}{3}\right)_k \left(\frac{5}{3}\right)_k \left(\frac{5}{3}\right)_k} \frac{(-\rho)^k}{k!} \frac{1}{1 - \varepsilon\left[\psi(1+k) - \psi(1)\right] + O(\varepsilon^2)}. $$

Теперь мы можем собственно перейти к раскрытию неопределенности:

$$A_4^\varepsilon + A_5^\varepsilon = \frac{81}{4}\pi\rho^{\frac{2}{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1)_k\left(\frac{4}{3}\right)_k\left(\frac{4}{3}\right)_k\left(\frac{5}{3}\right)_k\left(\frac{5}{3}\right)_k}\frac{(-\rho)^k}{k!}\times$$

$$\times\left[\ln\rho - 2\psi(1+k) - 2\psi\left(\frac{4}{3}+k\right) - 2\psi\left(\frac{5}{3}+k\right) + \psi\left(\frac{4}{3}\right) + \right.$$

$$\left. +\psi\left(\frac{5}{3}\right) - \psi\left(-\frac{2}{3}\right) - \psi\left(-\frac{1}{2}\right) - \psi\left(-\frac{1}{3}\right) + \psi\left(\frac{3}{2}\right) + O(\varepsilon)\right]\times$$

$$\times\frac{1}{1+\varepsilon\left[2\psi(1+k) - 2\psi(1) + 2\psi\left(\frac{4}{3}+k\right) - \psi\left(\frac{4}{3}\right) + 2\psi\left(\frac{5}{3}+k\right) - \psi\left(\frac{5}{3}\right)\right] + O\left(\varepsilon^2\right)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0}$$

$$\to \frac{81}{4}\pi\rho^{\frac{2}{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\ln\rho - 2\psi(1+k) - 2\psi\left(\frac{4}{3}+k\right) - 2\psi\left(\frac{5}{3}+k\right)}{(1)_k\left(\frac{4}{3}\right)_k\left(\frac{4}{3}\right)_k\left(\frac{5}{3}\right)_k\left(\frac{5}{3}\right)_k}\frac{(-\rho)^k}{k!}.$$

Совершенный нами предельный переход требует обоснования. В его левой части стоит разложение функции двух переменных $g(\rho,\varepsilon)$ в двойной степенной ряд. Эта функция аналитическая вследствие аналитичности по параметрам функции $G_{p,q}^{m,n}((a_p);(b_q);\rho)$. Вследствие равномерной сходимости степенных рядов, справедливы следующие операции изменения порядка суммирования и предельного перехода под знаком суммы:

$$g(\rho,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} g_{k,n}\varepsilon^n\rho^k = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{k=0}^{\infty} g_{k,n}\rho^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^n\sum_{k=0}^{\infty} g_{k,n}\rho^k = \sum_{k=0}^{\infty} g_{k,0}\rho^k,$$

что и доказывает справедливость произведенного предельного перехода. Впоследствии мы больше не будем останавливаться на обосновании правомерности этой операции в аналогичных местах параграфов 2.5 и 2.6.

Заметив, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_i^\varepsilon = A_i^0, i = 1,2,3,$ окончательно получаем следующее утверждение:

Теорема 2.2. *Функция*

$$\Omega_1^0(z) = \frac{1}{6\pi}\left[A_1^0 + A_2^0 + A_3^0 + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(A_4^\varepsilon + A_5^\varepsilon\right)\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\,{}_0F_5\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},1;-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right) -$$

$$-z\;{}_1F_6\left[\begin{matrix}1;\\ \frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{5}{6},\frac{7}{6},\frac{7}{6};\end{matrix}\ -\left(\frac{z}{6}\right)^6\right] +$$

$$+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}z^2\;{}_0F_5\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3},1;-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right) -$$

$$-\frac{1}{192}z^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(1+k)+\psi\left(\frac{4}{3}+k\right)+\psi\left(\frac{5}{3}+k\right)}{(1)_k\left(\frac{4}{3}\right)_k\left(\frac{4}{3}\right)_k\left(\frac{5}{3}\right)_k\left(\frac{5}{3}\right)_k} \frac{\left(-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)^k}{k!}+$$

$$+\frac{1}{64}z^4 \ln\frac{z}{6}\,{}_0F_5\left(1,\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3};-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right) \qquad (2.15)$$

является аналитическим продолжением в комплексную область функции $\omega_1^0(x)$ *и при* $x>0$ $\omega_1^0(x)=\Omega_1^0(x)$.

2.4.2. Метод вычетов

Тот же результат может быть получен прямым суммированием вычетов подынтегральной функции из (2.11). Все выкладки, которые мы здесь произведем, уже были нами ранее приведены в первой главе для общего случая G-функции. Для наглядности мы их повторим для данного частного случая, но сейчас мы будем исходить из определения H-функции Фокса, приводя одновременно ссылки на соответствующие формулы 1 главы. Введем обозначение:

$$\mathcal{H}_1^0(z,u)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{u}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}-\frac{u}{3}\right)\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{u}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-u}.$$

Тогда

$$\Omega_1^0(z)=\frac{1}{12\pi i}\int\limits_{L_H}\mathcal{H}_1^0(z,u)du.$$

$\mathcal{H}_1^0(z,u)$ имеет полюса в точках, в которых имеют полюса входящие в нее Γ-функции, именно: $\frac{u}{3}+\frac{1}{3}=-n\Rightarrow u=-3n-1$, $\frac{u}{2}=-m\Rightarrow u=-2m$, $\frac{2}{3}-\frac{u}{3}=-l\Rightarrow u=3l+2$, $n,m,l=0,1,\ldots$ В точках, в которых выполняются сразу несколько из приведенных равенств, функция $\mathcal{H}_1^0(z,u)$ имеет кратные полюса. Очевидно, могут выполняться одновременно только первые два равенства: $u=-2m=-3n-1\Leftrightarrow u=u_k=-6k-4$, $k=0,1,\ldots$ Найдем вычеты $\mathcal{H}_1^0(z,u)$ в этих точках (полюса второго порядка типа (0,0)):

$$\operatorname*{res}_{u=u_k}\mathcal{H}_1^0(z,u)=\lim_{u\to u_k}\frac{d}{du}\left[(u-u_k)^2\mathcal{H}_1^0(z,u)\right]=$$

$$=\lim_{u\to u_k}\left\{2(u-u_k)\mathcal{H}_1^0(z,u)+(u-u_k)^2\frac{d}{du}\mathcal{H}_1^0(z,u)\right\}=$$

$$=\lim_{u\to u_k}(u-u_k)\mathcal{H}_1^0(z,u)\left\{2+(u-u_k)\times\right.$$

$$\left.\times\left[-\ln\frac{z}{2}+\frac{1}{3}\psi\left(\frac{1}{3}+\frac{u}{3}\right)+\frac{1}{2}\psi\left(\frac{u}{2}\right)-\frac{1}{3}\psi\left(\frac{2}{3}-\frac{u}{3}\right)+\frac{1}{2}\psi\left(1-\frac{u}{2}\right)\right]\right\}.$$

Далее, воспользовавшись функциональным уравнением для ψ-функции (напр. [5]) и заменив котангенс вблизи нуля его асимптотикой:

$$\psi(y-n) = \psi(1-y+n) - \pi\cot\pi y = \psi(1-y+n) - \frac{1}{y} + O(y),\ \ y \to 0,$$

имеем:

$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{u=u_k} \mathcal{H}_1^0(z,u) = \lim_{u\to u_k}(u-u_k)\mathcal{H}_1^0(z,u)\,\{2 + (u-u_k)\times \\ \times\left[-\ln\frac{z}{2} + \psi\left(-\frac{1}{2}(u-u_k)+3k+3\right) - \frac{2}{u-u_k} + O(u-u_k)\right]\right\} = \\ = \lim_{u\to u_k}\left[(u-u_k)^2\mathcal{H}_1^0(z,u)\right]\left[-\ln\frac{z}{2} + \psi(3k+3)\right].\end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись предельным равенством для Г-функции

$$\lim_{y\to 0} y\Gamma(y-n) = \frac{(-1)^n}{n!},\ \ n = 0, 1, \ldots,$$

вытекающим из определения вычета функции и значения вычетов Г-функции, находим предел:

$$\operatorname*{res}_{u=u_k} \mathcal{H}_1^0(z,u) = 6\left(\frac{z}{2}\right)^{6k+4}\frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(3k+3)\Gamma(3k+3)}\left[-\ln\frac{z}{2} + \psi(3k+3)\right].$$

Наконец, воспользовавшись формулой тройного аргумента Г-функции, получаем

$$\operatorname*{res}_{u=u_k} \mathcal{H}_1^0(z,u) = -\frac{z^4}{32}\ \frac{\psi(k+1) + \psi\left(k+\frac{4}{3}\right) + \psi\left(k+\frac{5}{3}\right) - 3\ln\frac{z}{6}}{(1)_k\left(\frac{4}{3}\right)_k\left(\frac{4}{3}\right)_k\left(\frac{5}{3}\right)_k\left(\frac{5}{3}\right)_k}\frac{\left(-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)^k}{k!}.$$

Несложно проверить, что то же разложение получается применением формулы (1.15). Нам остается лишь просуммировать полученные значения вычетов по k от 0 до ∞, домножить полученную сумму на коэффициент при H-функции Фокса 1/6 и заметить точное совпадение полученного выражения с суммой последних двух членов из (2.15).

Теперь посчитаем вычеты в простых полюсах. В данном примере все простые полюса типа (0,0). Вычеты в них вычисляются по формуле (1.11). Пусть теперь $u_k = -6k$, вычет функции в этих точках равен

$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{u=u_k} \mathcal{H}_1^0(z,u) = \lim_{u\to u_k}(u-u_k)\mathcal{H}_1^0(z,u) = \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}-2k\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}+2k\right)}{\Gamma(1+3k)}\left(\frac{z}{2}\right)^{6k}\lim_{u\to u_k}(u-u_k)\Gamma\left(\frac{1}{2}(u-u_k)-3k\right) = \\ = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\frac{\left(-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)^k}{\left(\frac{1}{3}\right)_k\left(\frac{1}{3}\right)_k\left(\frac{2}{3}\right)_k\left(\frac{2}{3}\right)_k(1)_k k!}.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что полученное выражение, разделенное на 6 и просуммированное по k, соответствует первому члену (2.15).

Следующая группа полюсов соответствует значениям аргумента $u_k = -6k-1$:

$$\operatorname*{res}_{u=u_k} \mathcal{H}_1^0(z,u) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-3k\right)\Gamma(1+2k)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+3k\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{6k+1}\lim_{u\to u_k}(u-u_k)\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(u-u_k)-2k-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= -6z\,\frac{(1)_k\left(-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{5}{6}\right)_k\left(\frac{5}{6}\right)_k\left(\frac{7}{6}\right)_k\left(\frac{7}{6}\right)_k k!}.$$

Эта группа полюсов дает второй член (2.15).

Последняя группа полюсов соответствует значениям аргумента $u_k = -6k-2$:

$$\operatorname*{res}_{u=u_k} \mathcal{H}_1^0(z,u) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}z^2\,\frac{\left(-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)^k}{\left(\frac{2}{3}\right)_k\left(\frac{2}{3}\right)_k\left(\frac{4}{3}\right)_k\left(\frac{4}{3}\right)_k(1)_k k!},$$

что соответствует третьему члену (2.15) и завершает проверку.

2.5. Случай $\nu = 0, s$ - любое

Этот случай все еще значительно проще самого общего, однако, здесь мы уже встречаемся с обеими возможностями - наличия у функции $\mathcal{H}_s^0(z,u)$, такой что

$$\Omega_s^0(z) = \frac{1}{12\pi i}\int\limits_{L_H}\mathcal{H}_s^0(z,u)du$$

только простых полюсов (как в случае $\nu = 0, s = 1/2$) и наличия у нее как простых так и полюсов второго порядка (как в случае $\nu = 0, s = 1$), в зависимости от конкретного значения s. Имеем

$$\omega_s^0(x) = \int\limits_0^\infty \frac{y^s}{1+y^3}J_0(xy)dy. \qquad (2.16)$$

Произведя все ту же замену переменной, перепишем интеграл (2.16) в виде свертки Меллина и применим преобразование Меллина:

$$M[\omega_s^0(x)](\sigma) = M\left[\int\limits_0^\infty \frac{y^{2-s}}{1+y^3}J_0\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}\right](\sigma) =$$

$$= M\left[\frac{y^{2-s}}{1+y^3}\right](\sigma)M[J_0(y)](\sigma) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}+\frac{\sigma}{3}-\frac{s}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}-\frac{\sigma}{3}+\frac{s}{3}\right)2^{\sigma-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)},$$

где

$$\max(0,\ \mathrm{Re}\ s-2) < \mathrm{Re}\ \sigma < \min\left(\frac{3}{2}, \mathrm{Re}\ s+1\right),$$

то есть

$$-1 < \mathrm{Re}\ s < 7/2. \tag{2.17}$$

Тогда, используя таблицу преобразований Меллина из [48],

$$\omega_s^0(x) = \Omega_s^0(x) = \frac{1}{6} H_{1,3}^{2,1}\left[\frac{x}{2}\,\middle|\, \begin{matrix} \left(\frac{2}{3}-\frac{s}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ \left(\frac{2}{3}-\frac{s}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right) \end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{6\pi} G_{2,8}^{5,2}\left(\left(\frac{x}{6}\right)^6 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{3}-\frac{s}{6}, \frac{5}{6}-\frac{s}{6} \\ \frac{1}{3}-\frac{s}{6}, \frac{5}{6}-\frac{s}{6}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{6\pi} W_s^0\left(\left(\frac{x}{6}\right)^6\right),$$

где, как и раньше, $\Omega_s^0(z)$ - аналитическое продолжение функции $\omega_s^0(x)$. Дальше мы будем рассматривать именно ее.

Проверим существование приведенных выше G-функции Мейера и H-функции Фокса. Соответствующие условия приведены и обоснованы нами в первой главе, также они могут быть найдены, например, в [5]. Опуская промежуточные выкладки (они будут приведены со всеми подробностями ниже для случая произвольных значений параметров ν и s), укажем только, что условием существования G- (H-) функции является

$$s \notin \{-1\} \cup \{-3, -4, -5, \ldots\}, \tag{2.18}$$

впрочем, эти значения отсечены ограничением (2.17). Значения

$$s \in \{4\} \cup \{6, 7, 8, \ldots\}, \tag{2.19}$$

при которых происходит уничтожение полюсов числителя образа Меллина интеграла (2.16) с полюсами его знаменателя (подробные объяснения также в следующем параграфе), мы также здесь не будем рассматривать. Отметим также, что условие (2.17) являетя на самом деле условием существования преобразования Меллина интеграла (2.16), сами же G- и H-функции существуют при произвольных значениях параметра s, кроме указанных в (2.18).

Далее, если никакие два из первых пяти нижних параметров функции $G_{2,8}^{5,2}$ (обозначим их $b_1, \ldots, b_5$) не отличаются на целое число, то справедливо представление:

$$W_s^0(\rho) = \pi\Gamma\left[\begin{matrix} \frac{s}{6}-\frac{1}{3}, & \frac{s}{6}, & \frac{s}{6}+\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3}-\frac{s}{6}, & 1-\frac{s}{6}, & \frac{2}{3}-\frac{s}{6} \end{matrix}\right] \rho^{\frac{1}{3}-\frac{s}{6}} \times$$

$$\times {}_1F_6\left[\begin{matrix}1; \\ \frac{2}{3}-\frac{s}{6}, \frac{2}{3}-\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}, 1-\frac{s}{6}, \frac{4}{3}-\frac{s}{6}, \frac{4}{3}-\frac{s}{6};\end{matrix} \; -\rho\right] -$$

$$-\pi\Gamma\left[\begin{matrix}\frac{s}{6}-\frac{5}{6}, & \frac{s}{6}-\frac{1}{2}, & \frac{s}{6}-\frac{1}{6} \\ \frac{11}{6}-\frac{s}{6}, & \frac{3}{2}-\frac{s}{6}, & \frac{7}{6}-\frac{s}{6}\end{matrix}\right]\rho^{\frac{5}{6}-\frac{s}{6}}\times$$

$$\times {}_1F_6\left[\begin{matrix}1; \\ \frac{7}{6}-\frac{s}{6}, \frac{7}{6}-\frac{s}{6}, \frac{3}{2}-\frac{s}{6}, \frac{3}{2}-\frac{s}{6}, \frac{11}{6}-\frac{s}{6}, \frac{11}{6}-\frac{s}{6};\end{matrix} \; -\rho\right] +$$

$$+\Gamma\left[\frac{1}{3}-\frac{s}{6}, \frac{5}{6}-\frac{s}{6}, \frac{1}{6}+\frac{s}{6}, \frac{2}{3}+\frac{s}{6}\right]\times$$

$$\times {}_0F_5\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1; -\rho\right) -$$

$$-9\Gamma\left[-\frac{s}{6}, \frac{1}{2}-\frac{s}{6}, \frac{1}{2}+\frac{s}{6}, 1+\frac{s}{6}\right]\rho^{\frac{1}{3}}\times$$

$$\times {}_0F_5\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}; -\rho\right) +$$

$$+\frac{81}{4}\Gamma\left[-\frac{1}{3}-\frac{s}{6}, \frac{1}{6}-\frac{s}{6}, \frac{5}{6}+\frac{s}{6}, \frac{4}{3}+\frac{s}{6}\right]\rho^{\frac{2}{3}}\times$$

$$\times {}_0F_5\left(1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}; -\rho\right). \tag{2.20}$$

Для слагаемых из приведенной выше формулы (2.20) мы будем использовать обозначения $A_1^s, \ldots, A_5^s$ в том порядке, в котором они выписаны.

Рассмотрим теперь случаи, когда какие-либо два из параметров $b_1, \ldots, b_5$ отличаются на некоторое r - целое число. Это достигается при некоторых определенных значениях s, а именно при

$$s = s_i \in \{-2+6r, 6r, 1+6r, 2+6r, 3+6r, 5+6r\}, r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Учитывая (2.17), множество s_i сужается до $s_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, при этом $r = 0$ и какие-то два из $b_1, \ldots, b_5$ равны, а именно равны один из первых двух и один из последних трех этих параметров. Перенумеруем, если нужно, первые пять нижних коэффициентов функции $G_{2,8}^{5,2}$ $b_1, \ldots, b_5$ так, чтобы $b_1 = b_3$, b_2 - оставшийся из первых двух параметров b_1, b_2; b_4 и b_5 - оставшиеся из пяти в произвольном порядке. Выпишем значения b_j, соответствующие конкретным значениям s_i, в виде таблицы:

s_i	0	1	2	3
$b_1 = b_3$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
b_2	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$
b_4	0	0	$\frac{1}{3}$	0
b_5	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Пусть теперь $s = s_i + 6\varepsilon, \varepsilon > 0$. Тогда разложение (2.20) справедливо. При стремлении ε к нулю два из $A_i^s, i = 1, \ldots, 5$ стремятся к ∞ и их сумма образует неопределенность вида $\infty - \infty$. Какие именно A_i^s станут неограниченными зависит от конкретного значения s_i. Обозначим сумму двух неограниченных слагаемых Δ_s, а сумму остальных трех - Ξ_s. Тогда случаи различных s_i можно выписать в виде таблицы:

s_i	0	1	2	3
Δ_s	$A_1^s + A_4^s$	$A_2^s + A_5^s$	$A_1^s + A_3^s$	$A_2^s + A_4^s$
Ξ_s	$A_2^s + A_3^s + A_5^s$	$A_1^s + A_3^s + A_4^s$	$A_2^s + A_4^s + A_5^s$	$A_1^s + A_3^s + A_5^s$

Для удобства перенумеруем A_i^s по аналогии с b_i: пусть A_1^s - тот из первых двух слагаемых (2.20), который при стремлении ε к нулю становится неограниченным. A_2^s - оставшийся из первых двух; A_3^s - второе неограниченное слагаемое; A_4^s и A_5^s - оставшиеся два, соответствующие b_4 и b_5 в том смысле, что A_4^s имеет сомножителем ρ^{b_4}, а A_5^s - ρ^{b_5}.

Чтобы иметь возможность рассматривать все перечисленные случаи значений s_i сразу, мы введем новые универсальные обозначения для параметров функций A_i^s и выпишем Δ_s в явном виде:

$$\Delta_{s_i+6\varepsilon} = C_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} \Gamma \left[\begin{array}{ll} a_1 + \varepsilon, & a_2 + \varepsilon \\ 1 - a_1 - \varepsilon, & 1 - a_2 - \varepsilon \end{array} \right] \rho^{b_1 - \varepsilon} \times$$

$$\times {}_1F_6 \left[\begin{array}{l} 1; \\ 1 - a_1 - \varepsilon, 1 - a_1 - \varepsilon, 1 - a_2 - \varepsilon, 1 - a_2 - \varepsilon, 1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon; \end{array} -\rho \right] -$$

$$-C_2 \frac{1}{\varepsilon} \Gamma \left[1 - \varepsilon, d_1 - \varepsilon, d_2 + \varepsilon, d_3 + \varepsilon\right] \rho^{b_2} \times$$
$$\times {}_0F_5 \left(1 - a_1, 1 - a_1, 1 - a_2, 1 - a_2, 1; -\rho\right). \qquad (2.21)$$

Введенные константы при различных значениях s_i принимают значения:

s_i	0	1	2	3
a_1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
a_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
d_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
d_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
d_3	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
C_1	π	$-\pi$	π	$-\pi$
C_2	-9	$\frac{81}{4}$	1	-9

Разложим Γ-функции из первого слагаемого (2.21) в ряд по степеням ε:

$$\Gamma\left[\begin{array}{lll} 1+\varepsilon, & a_1+\varepsilon, & a_2+\varepsilon \\ 1-\varepsilon, & 1-a_1-\varepsilon, & 1-a_2-\varepsilon \end{array}\right] =$$

$$= \Gamma\left[\begin{array}{ll} a_1, & a_2 \\ 1-a_1, & 1-a_2 \end{array}\right] \times$$

$$\times \frac{1+\varepsilon\left(\psi(1)+\psi(a_1)+\psi(a_2)\right)+O\left(\varepsilon^2\right)}{1-\varepsilon\left(\psi(1)+\psi(1-a_1)+\psi(1-a_2)\right)+O\left(\varepsilon^2\right)},$$

разложение в ряд экспоненты дает:

$$\rho^{b_1-\varepsilon} = \rho^{b_1}\left(1-\varepsilon\ln\rho+O\left(\varepsilon^2\right)\right).$$

Используя формулу разложения в ряд символов Похгаммера, перепишем гипергеометрическую функцию в виде:

$${}_1F_6\left[\begin{array}{l} 1; \\ 1-a_1-\varepsilon, 1-a_1-\varepsilon, 1-a_2-\varepsilon, 1-a_2-\varepsilon, 1-\varepsilon, 1-\varepsilon; \end{array} \; -\rho\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-a_1)_k(1-a_1)_k(1-a_2)_k(1-a_2)_k(1)_k} \frac{(-\rho)^k}{k!} \times$$

$$\times \left[1-2\varepsilon\left(\psi(1-a_1+k)+\psi(1-a_2+k)+\psi(1+k)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\psi(1-a_1)-\psi(1-a_2)-\psi(1)\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\right]^{-1}.$$

Аналогично разложим Γ-функции из второго слагаемого (2.21):

$$\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(d_1-\varepsilon)\Gamma(d_2+\varepsilon)\Gamma(d_3+\varepsilon) =$$

$$= \Gamma(d_1)\Gamma(d_2)\Gamma(d_3)\left(1+\varepsilon\left(-\psi(1)-\psi(d_1)+\psi(d_2)+\psi(d_3)\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\right).$$

Замечая, что

$$C_1\Gamma\left[\begin{array}{ll} a_1, & a_2 \\ 1-a_1, & 1-a_2 \end{array}\right] = C_2\Gamma(d_1)\Gamma(d_2)\Gamma(d_3)$$

и устремляя ε к нулю, имеем:

$$\Delta_{s_i+6\varepsilon}(z) \to \Delta_{s_i}(z) = \left(\frac{z}{6}\right)^{6b_1} C_1 \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(1-a_1)\Gamma(1-a_2)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\psi(1-a_1+k)+2\psi(1-a_2+k)+2\psi(1+k)-6\ln\left(\frac{z}{6}\right)}{(1-a_1)_k(1-a_1)_k(1-a_2)_k(1-a_2)_k(1)_k} \frac{\left(-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)^k}{k!}.$$

Пределы слагаемых (2.20) с номерами 2, 4 и 5 равны $A_j^{s_i+6\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} A_j^{s_i}$ $j = 2, 4, 5$, тогда окончательный результат можно представить в виде:

$$\Omega_s^0(z) = \frac{1}{6\pi}\left(\Delta_{s_i} + \Xi_{s_i}\right) = \frac{1}{6\pi}\left(\Delta_{s_i} + A_2^{s_i} + A_4^{s_i} + A_5^{s_i}\right). \tag{2.22}$$

Подытоживая сказанное в этом параграфе, приведем следующую теорему:

Теорема 2.3. *Функция $\Omega_s^0(z)$, совпадающая с функцией $\omega_s^0(x)$ при положительных значениях аргумента и при выполнении условия (2.17), является ее аналитическим продолжением в область комплексных значений аргумента z и параметра s с соблюдением только лишь условия (2.18). При этом функция $\Omega_s^0(z)$ может быть разложена в ряд (при $s \notin \{4\} \cup \{6, 7, 8, \ldots\}$) по одной из формул: (2.20) при $s \notin \mathbf{S} = \{-2\} \cup \{0, 1, 2, 3, 5\}$ и (2.22) при $s \in \mathbf{S}$.*

2.6. Общий случай

Перепишем интеграл (2.1) в виде свертки Меллина и применим преобразование Меллина:

$$M[\omega_s^\nu(x)](\sigma) = M\left[\int\limits_0^\infty \frac{y^{2-s}}{1+y^3} J_\nu\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}\right](\sigma) =$$

$$= M\left[\frac{y^{2-s}}{1+y^3}\right](\sigma) M[J_\nu(y)](\sigma) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3} + \frac{\sigma}{3} - \frac{s}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3} - \frac{\sigma}{3} + \frac{s}{3}\right) 2^{\sigma-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \frac{\sigma}{2} + 1\right)},$$

где

$$\max(-\mathrm{Re}\,\nu,\ \mathrm{Re}\,s - 2) < \mathrm{Re}\,\sigma < \min\left(\frac{3}{2}, \mathrm{Re}\,s + 1\right). \tag{2.23}$$

Отметим, что преобразование Меллина функции (2.1) может быть получено также с использованием представления этой функции в виде преобразования Ханкеля рациональной функции:

$$\omega_s^\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int\limits_0^\infty \frac{y^{s-1/2}}{1+y^3} \sqrt{xy} J_\nu(xy) dy = \frac{1}{\sqrt{x}} H_\nu\left[\frac{y^{s-1/2}}{1+y^3}; x\right].$$

Тогда образ Меллина функции (2.1) может быть получен с использованием формулы (напр. из [130]) преобразования Меллина преобразования Ханкеля

$$M[H_\nu[f(y); x]](\sigma) = 2^{\sigma-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\nu}{2} + \frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\nu}{2} - \frac{\sigma}{2}\right)} M[f(x)](1-\sigma).$$

Условие (2.23) более строгое, чем (2.8). Вместо условия $\mathrm{Re}\,\nu > -9/2$ в (2.8) здесь мы имеем $\mathrm{Re}\,\nu > -3/2$. Это происходит потому, что теперь мы требуем сходимости не только интеграла (2.1), но также и сходимость каждого из интегралов $M\left[\dfrac{y^{2-s}}{1+y^3}\right](z)$ и $M[J_\nu(y)](z)$.

Тогда, используя таблицу преобразований Меллина из [48],

$$\omega_s^\nu(x) = \frac{1}{12\pi i}\int\limits_{L_H} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}-\frac{s}{3}+\frac{u}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{s}{3}-\frac{u}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1-\frac{u}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-u} du = \tag{2.24}$$

$$= \frac{1}{6} H_{1,3}^{2,1}\left[\frac{x}{2}\,\middle|\, \begin{matrix} \left(\frac{2}{3}-\frac{s}{3},\frac{1}{3}\right) \\ \left(\frac{2}{3}-\frac{s}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2}\right)\end{matrix}\right] = \frac{1}{12\pi^2 i}\times$$

$$\times\int\limits_{L_G}\Gamma\left[\begin{matrix}\frac{1}{3}-\frac{s}{6}+u, & \frac{5}{6}-\frac{s}{6}+u, & \frac{\nu}{6}+u, & \frac{\nu}{6}+\frac{1}{3}+u, & \frac{\nu}{6}+\frac{2}{3}+u, & \frac{2}{3}+\frac{s}{6}-u, & \frac{1}{6}+\frac{s}{6}-u \\ \frac{\nu}{6}+\frac{1}{3}-u, & \frac{\nu}{6}+\frac{2}{3}-u, & \frac{\nu}{6}+1-u & & & & \end{matrix}\right]\times \tag{2.25}$$

$$\times\left(\frac{x}{6}\right)^{-6u} du = \frac{1}{6\pi} G_{2,8}^{5,2}\left(\left(\frac{x}{6}\right)^6 \,\middle|\, \begin{matrix}\frac{1}{3}-\frac{s}{6},\frac{5}{6}-\frac{s}{6} \\ \frac{1}{3}-\frac{s}{6},\frac{5}{6}-\frac{s}{6},\frac{\nu}{6},\frac{\nu}{6}+\frac{1}{3},\frac{\nu}{6}+\frac{2}{3},-\frac{\nu}{6},-\frac{\nu}{6}+\frac{1}{3},-\frac{\nu}{6}+\frac{2}{3}\end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{6\pi} W_s^\nu\left(\left(\frac{x}{6}\right)^6\right).$$

Здесь L_G и L_H-траектории интегрирования в комплексной плоскости, подробно описанные ранее. Интегралы (2.25) и (2.24) сходятся при произвольных комплексных x, ν и s, кроме "запрещенных" значений ν и s, при которых построение подходящего контура интегрирования невозможно (эти значения разобраны ниже). Следовательно, как и раньше, мы можем рассматривать аналитическое продолжение функции $\omega_s^\nu(x)$ - функцию $\Omega_s^\nu(z)$, не ограничивая себя условием (2.23). Соответственно, мы будем говорить о гипергеометрических функциях комплексного аргумента $G(z)$, $H(z)$, $W_s^\nu\left(\left(\dfrac{z}{6}\right)^6\right)$.

Приведем некоторые следствия полученного представления. Известно, что преобразование Ханкеля равно своему обратному. Следовательно приведенные выше выражения функции ω_s^ν через G- и H-функции немедленно дают преобразования Ханкеля соответствующих G- и H-функций.

При полуцелых значениях параметра ν функция Бесселя выражается через косинус и синус по формулам вида

$$J_{\pm(k+1/2)}(z) = (\pi z/2)^{-1/2}(p_k^\pm(1/z)\sin z + q_k^\pm(1/z)\cos z),\ k = 0, 1, \ldots,$$

где $p_k^\pm(1/z)$ и $q_k^\pm(1/z)$ - многочлены порядка k. В частности $p_0^+ = 1$, $q_0^+ = 0$ и $J_{1/2}(z) = (\pi z/2)^{-1/2}\sin z$; $p_0^- = 0$, $q_0^- = 1$ и $J_{-1/2}(z) = (\pi z/2)^{-1/2}\cos z$. Алгоритм вычисления $p_k^\pm$ и $q_k^\pm$ и явные формулы этих многочленов для

$k = 0, 1, \ldots, 5$ могут быть найдены, например, в [103]. Однако, и при этих значениях ν G-функция Мейера (H-функция Фокса) из приведенной выше формулы не сводится к более простым функциям, в частности это значит, что Фурье синус- и косинус-преобразования функции $y^s/(1+y^3)$ выражаются через высшие трансцендентные функции.

Мы будем использовать обозначение для подынтегральной функции из (2.24) $\mathcal{H}_s^\nu(x,u)$, так что

$$\omega_s^\nu(x) = \frac{1}{12\pi i}\int\limits_L \mathcal{H}_s^\nu(x,u)du.$$

Очевидно, для аналитического продолжения справедливо

$$\Omega_s^\nu(z) = \frac{1}{12\pi i}\int\limits_L \mathcal{H}_s^\nu(z,u)du.$$

Аналогично, подынтегральную функцию из (2.25) обозначим $\mathcal{G}_s^\nu(x,u)$, так что

$$\Omega_s^\nu(z) = \frac{1}{12\pi^2 i}\int\limits_L \mathcal{G}_s^\nu(z,u)du.$$

Разберем подробно все возможные сочетания значений параметров H- (G-) функции. Прежде, чем непосредственно перейти к рассмотрению конкретных случаев, мы выпишем для наглядности полюса всех Г-функций из определения (2.24), одновременно приводя общий вид соответствующих Г-функций из общего определения H-функции (1.5):

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \ \Gamma(b_i+B_iu),\ i=1,2: && (2.26)\\
&\quad\ \Gamma\left(\frac{2}{3}-\frac{s}{3}+\frac{u}{3}\right):\ s-2-3k, &&\\
&\quad\ \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{u}{2}\right):\ -\nu-2k, &&\\
&\text{(ii)}\ \Gamma(1-a_i-A_iu),\ i=1: && (2.27)\\
&\quad\ \Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{s}{3}-\frac{u}{3}\right):\ s+1+3k, &&\\
&\text{(iii)}\,\Gamma(1-b_i-B_iu),\ i=3: && (2.28)\\
&\quad\ \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1-\frac{u}{2}\right):\ \nu+2+2k &&
\end{aligned}$$

или, в обозначениях определений (2.25) и (1.4):

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \ \Gamma(b_i+u),\ i=1,\ldots,5: && (2.29)\\
&\Gamma\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{6}+u\right):\ \frac{s}{6}-\frac{1}{3}-k, &&\\
&\Gamma\left(\frac{5}{6}-\frac{s}{6}+u\right):\ \frac{s}{6}-\frac{5}{6}-k, &&
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \Gamma\left(\frac{\nu}{6}+u\right): \ -\frac{\nu}{6}-k,\\
 & \Gamma\left(\frac{\nu}{6}+\frac{1}{3}+u\right): \ -\frac{\nu}{6}-\frac{1}{3}-k,\\
 & \Gamma\left(\frac{\nu}{6}+\frac{2}{3}+u\right): \ -\frac{\nu}{6}-\frac{2}{3}-k,\\
\text{(ii)} & \Gamma(1-a_i-u),\ i=1,2: \\
 & \Gamma\left(\frac{2}{3}+\frac{s}{6}-u\right): \ \frac{s}{6}+\frac{1}{6}+k,\\
 & \Gamma\left(\frac{1}{6}+\frac{s}{6}-u\right): \ \frac{s}{6}+\frac{2}{3}+k,\\
\text{(iii)} & \Gamma(1-b_i-u),\ i=6,7,8: \\
 & \Gamma\left(\frac{\nu}{6}+\frac{1}{3}-u\right): \ \frac{\nu}{6}+\frac{1}{3}+k,\\
 & \Gamma\left(\frac{\nu}{6}+\frac{2}{3}-u\right): \ \frac{\nu}{6}+\frac{2}{3}+k,\\
 & \Gamma\left(\frac{\nu}{6}+1-u\right): \ \frac{\nu}{6}+1+k,
\end{array}
$$

(2.30)

(2.31)

где $k=0,1,\ldots$

Рассмотрим все возможные соотношения между полюсами Г-функций:

а) совпадают полюса Г-функций вида (2.26) и (2.27) (или, что то же самое, (2.29) и (2.30)). Такие совпадения происходят, если

$$-\nu-2k_1=1+s+3k_2,\ \ k_1,k_2=0,1,2,\ldots,$$

т.е. при

$$s+\nu=\lambda=-1-2k_1-3k_2 \iff \lambda\in\mathbf{\Lambda}=\{-1\}\cup\{-3,-4,-5,\ldots\}.$$

б) совпадают между собой полюса Г-функций вида (2.26). Такие совпадения происходят, если выполняется соотношение

$$s-2-3k_1=-\nu-2k_2\Rightarrow s+\nu=\lambda\in\mathbf{Z}.$$

в) совпадают полюса Г-функций из наборов (2.26) и (2.28). Условия для таких совпадених следующие:

$$s-2-3k_1=\nu+2+2k_2 \text{ или } -\nu-2k_1=\nu+2+2k_2,$$

т.е. при

$$s-\nu=\mu=4+2k_2+3k_1 \iff \mu\in\mathbf{M}=\{4\}\cup\{5,6,7,\ldots\}$$

или

$$\nu\in-\mathbf{N}=\{-1,-2,-3,\ldots\}.$$

Теперь непосредственно разберем все возможные комбинации значений параметров ν и s и то, как они влияют на разложение G- (H-) функции.

Прежде всего определим условия существования G- (H-) функции. Как уже было указанно в главе 1, H- (G-) функция не существует, когда полюса Г-функций из числителя подынтегральной функции в ее определении (2.24) (соответственно, (2.25)) вида $\Gamma(b_i + B_i u)$, $i = 1, \ldots, m$ (функции B^+ в обозначениях 1 главы) совпадают с полюсами Г-функций вида $\Gamma(1 - a_j - A_j u)$, $j = 1, \ldots, n$ (функции A^+) (т.е., если имеет место случай (a)), именно, если $s + \nu = \lambda \in \mathbf{\Lambda}$. Следовательно, условие существования H-функции (или, что то же самое, G-функции) $\lambda \notin \mathbf{\Lambda}$.

1) Функция $\mathcal{G}_s^\nu(z, u)$ имеет простые полюса во всех точках, в которых имеют полюса Г-функции из определения (2.25) вида $\Gamma(b_i + u)$, $i = 1, \ldots, m$ - функция B^+, т.е. $\lambda \notin \mathbf{Z}$, $\mu \notin \mathbf{M}$, $\nu \neq -1, -2, \ldots$ Разложение G-функции в ряд в этом случае приведено в [5]. Воспользовавшись этой формулой, мы получаем представление

$$W_s^\nu(\rho) = \pi\Gamma\left[\begin{array}{lll} \frac{\lambda}{6} - \frac{1}{3}, & \frac{\lambda}{6}, & \frac{\lambda}{6} + \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} + \frac{\nu}{3} - \frac{\lambda}{6}, & 1 + \frac{\nu}{3} - \frac{\lambda}{6}, & \frac{2}{3} + \frac{\nu}{3} - \frac{\lambda}{6} \end{array}\right] \rho^{\frac{1}{3} + \frac{\nu}{6} - \frac{\lambda}{6}} \times$$

$$\times {}_1F_6\left[\begin{array}{ll} 1; & \\ \frac{4}{3} - \frac{\lambda}{6}, 1 - \frac{\lambda}{6}, \frac{2}{3} - \frac{\lambda}{6}, \frac{4}{3} + \frac{\nu}{3} - \frac{\lambda}{6}, 1 + \frac{\nu}{3} - \frac{\lambda}{6}, \frac{2}{3} + \frac{\nu}{3} - \frac{\lambda}{6}; & -\rho \end{array}\right] -$$

$$-\pi\Gamma\left[\begin{array}{lll} \frac{\lambda}{6} - \frac{5}{6}, & \frac{\lambda}{6} - \frac{1}{2}, & \frac{\lambda}{6} - \frac{1}{6} \\ \frac{11}{6} + \frac{\nu}{3} - \frac{\lambda}{6}, & \frac{3}{2} + \frac{\nu}{3} - \frac{\lambda}{6}, & \frac{7}{6} + \frac{\nu}{3} - \frac{\lambda}{6} \end{array}\right] \rho^{\frac{5}{6} + \frac{\nu}{6} - \frac{\lambda}{6}} \times$$

$$\times {}_1F_6\left[\begin{array}{ll} 1; & \\ \frac{11}{6} - \frac{\lambda}{6}, \frac{3}{2} - \frac{\lambda}{6}, \frac{7}{6} - \frac{\lambda}{6}, \frac{11}{6} + \frac{\nu}{3} - \frac{\lambda}{6}, \frac{3}{2} + \frac{\nu}{3} - \frac{\lambda}{6}, \frac{7}{6} + \frac{\nu}{3} - \frac{\lambda}{6}; & -\rho \end{array}\right] +$$

$$+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\Gamma\left[\begin{array}{llll} \frac{1}{3} - \frac{\lambda}{6}, & \frac{5}{6} - \frac{\lambda}{6}, & \frac{2}{3} + \frac{\lambda}{6}, & \frac{1}{6} + \frac{\lambda}{6} \\ \frac{1}{3} + \frac{\nu}{3}, & \frac{2}{3} + \frac{\nu}{3}, & 1 + \frac{\nu}{3} & \end{array}\right] \rho^{\frac{\nu}{6}} \times$$

$$\times {}_0F_5\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\nu}{3}, \frac{2}{3} + \frac{\nu}{3}, 1 + \frac{\nu}{3}; -\rho\right) -$$

$$-2\sqrt{3}\pi\Gamma\left[\begin{array}{llll} -\frac{\lambda}{6}, & \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{6}, & \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{6}, & 1 + \frac{\lambda}{6} \\ \frac{2}{3} + \frac{\nu}{3}, & 1 + \frac{\nu}{3}, & \frac{4}{3} + \frac{\nu}{3} & \end{array}\right] \rho^{\frac{\nu}{6} + \frac{1}{3}} \times$$

$$\times {}_0F_5\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3} + \frac{\nu}{3}, 1 + \frac{\nu}{3}, \frac{4}{3} + \frac{\nu}{3}; -\rho\right) +$$

$$+3\sqrt{3}\pi\Gamma\left[\begin{array}{llll} -\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{6}, & \frac{1}{6} - \frac{\lambda}{6}, & \frac{5}{6} + \frac{\lambda}{6}, & \frac{4}{3} + \frac{\lambda}{6} \\ 1 + \frac{\nu}{3}, & \frac{4}{3} + \frac{\nu}{3}, & \frac{5}{3} + \frac{\nu}{3} & \end{array}\right] \rho^{\frac{\nu}{6} + \frac{2}{3}} \times$$

$$\times {}_0F_5\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 1 + \frac{\nu}{3}, \frac{4}{3} + \frac{\nu}{3}, \frac{5}{3} + \frac{\nu}{3}; -\rho\right), \qquad (2.32)$$

где $\lambda = s + \nu$. Далее, ссылаясь на приведенную выше формулу (2.32), для ее слагаемых мы будем использовать обозначения $A_1^\lambda(\rho), \ldots, A_5^\lambda(\rho)$ в том порядке, в котором они выписаны. Заметим, что эти слагаемые являются на самом деле суммами вычетов функции $\mathcal{G}_s^\nu(z,u)$ в полюсах из цепочек (2.29).

Функция $\Omega_s^\nu(z)$ может быть также посчитана в виде суммы вычетов подынтегральной функции из (2.24) в полюсах из цепочек (2.26):

$$\Omega_s^\nu(z) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{s}{2}-1-\frac{3}{2}k\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{s}{2}+2+\frac{3}{2}k\right)}(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{3k+2-s}+$$

$$+\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}-\frac{\nu}{3}-\frac{s}{3}-\frac{2}{3}k\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{\nu}{3}+\frac{s}{3}+\frac{2}{3}k\right)}{\Gamma(\nu+1+k)}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}. \qquad (2.33)$$

При этом, обозначив слагаемые (2.33) B_1 и B_2 соответственно, нетрудно обнаружить, что с точностью до коэффициента при W_s^ν и замены переменной, B_1 соответствует сумме $A_1^\lambda + A_2^\lambda$, а B_2 соответствует $A_3^\lambda + A_4^\lambda + A_5^\lambda$.

2) Функция $\mathcal{H}_s^\nu(z,u)$ имеет только простые полюса, причем некоторые из полюсов гамма-функции $\Gamma\left(\frac{2}{3}-\frac{s}{3}+\frac{u}{3}\right)$ из (2.24) уничтожаются с полюсами знаменателя. Как показано выше и как можно видеть из (2.33), это достигается при $s-\nu=\mu\in\mathbf{M}$. Отсутствие полюсов второго порядка обеспечивается условием $s+\nu=\lambda\notin\mathbf{Z}$. Следовательно $\nu=(\lambda-\mu)/2\notin\mathbf{Z}$. Поэтому для каждого конкретного значения $\mu\in\mathbf{M}$ при $\lambda\notin\mathbf{Z}$ уничтожения происходят только в одной цепочке полюсов из пяти, перечисленных в (2.29). На самом деле, пусть $\mu = 6r+\tilde{\mu}$, $r=1,2,\ldots$, $\tilde{\mu}\in\{-2,0,1,2,3,5\}$, тогда уничтожаются в точности r первых полюсов соответствующей цепочки - либо из слагаемого A_1^λ (при четных значениях $\tilde{\mu}=-2,0,2$), либо A_2^λ (при нечетных значениях $\tilde{\mu}=1,3,5$). Искомая функция может быть вычислена по одной из двух формул:

$$\Omega_s^\nu(z) = \frac{1}{6\pi}\left(\pi\Gamma\left[\begin{array}{lll}\frac{\lambda}{6}-\frac{1}{3}, & \frac{\lambda}{6}, & \frac{\lambda}{6}+\frac{1}{3}\\ \frac{4}{3}-\frac{\mu}{6}, & 1-\frac{\mu}{6}, & \frac{2}{3}-\frac{\mu}{6}\end{array}\right]\left(\frac{z}{6}\right)^{2+\nu-\lambda}\times\right.$$

$$\times{}_1F_6^{(r)}\left[\begin{array}{l}1;\\ \frac{4}{3}-\frac{\lambda}{6},1-\frac{\lambda}{6},\frac{2}{3}-\frac{\lambda}{6},\frac{4}{3}-\frac{\mu}{6},1-\frac{\mu}{6},\frac{2}{3}-\frac{\mu}{6};\end{array}\ -\left(\frac{z}{6}\right)^6\right]+$$

$$\left.+A_\lambda^2\left(\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)+A_\lambda^3\left(\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)+A_\lambda^4\left(\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)+A_\lambda^5\left(\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)\right) \qquad (2.34)$$

при четных значениях $\tilde{\mu}=-2,0,2$ или

$$\Omega_s^\nu(z) = \frac{1}{6\pi}\left(A_\lambda^1\left(\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)-\right.$$

$$-\pi\Gamma\left[\begin{array}{lll}\frac{\lambda}{6}-\frac{5}{6}, & \frac{\lambda}{6}-\frac{1}{2}, & \frac{\lambda}{6}-\frac{1}{6}\\ \frac{11}{6}-\frac{\mu}{6}, & \frac{3}{2}-\frac{\mu}{6}, & \frac{7}{6}-\frac{\mu}{6}\end{array}\right]\left(\frac{z}{6}\right)^{5+\nu-\lambda}\times$$

$$\times {}_1F_6^{(r)}\left[\begin{array}{l}1;\\ \frac{11}{6}-\frac{\lambda}{6},\frac{3}{2}-\frac{\lambda}{6},\frac{7}{6}-\frac{\lambda}{6},\frac{11}{6}-\frac{\mu}{6},\frac{3}{2}-\frac{\mu}{6},\frac{7}{6}-\frac{\mu}{6};\end{array}-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right]+$$

$$+A_\lambda^3\left(\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)+A_\lambda^4\left(\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)+A_\lambda^5\left(\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)\Bigg) \qquad (2.35)$$

при нечетных значениях $\tilde{\mu}=1,3,5$. Здесь ${}_pF_q^{(r)}$ - усеченная гипергеометрическая функция, определенная нами в главе 1.

3) Функция $\mathcal{H}_s^\nu(z,u)$ имеет только простые полюса, причем некоторые из полюсов гамма-функции $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{u}{2}\right)$ из (2.24) уничтожаются с полюсами знаменателя. Это достигается при $\nu\in\mathbf{N}$. Как в пункте 2, отсутствие полюсов второго порядка обеспечивается условием $s+\nu=\lambda\notin\mathbf{Z}$. Следовательно $\mu=s-\nu=(\lambda-2\nu)\notin\mathbf{Z}$. Этот случай удобно рассматривать, исходя из представления (2.33). Как нетрудно видеть, единственное, что изменится в этой формуле, это нижний предел суммирования во второй сумме:

$$\Omega_s^\nu(z)=\frac{1}{6}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{s}{2}-1-\frac{3}{2}k\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{s}{2}+2+\frac{3}{2}k\right)}(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{3k+2-s}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=-\nu}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}-\frac{\nu}{3}-\frac{s}{3}-\frac{2}{3}k\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{\nu}{3}+\frac{s}{3}+\frac{2}{3}k\right)}{\Gamma(\nu+1+k)}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}\right]. \qquad (2.36)$$

4) Г-функции из (2.26) (функция B^+) имеют совпадающие полюса (других совпадений нет, что значит, что имеются полюса первого и второго порядков - все типа (0,0)), т.е. имеет место случай (б): $\nu+s=\lambda\in\mathbf{Z}\setminus\mathbf{\Lambda}$, $s-\nu=\mu\notin\mathbf{M}$, $\nu\notin-\mathbf{N}$. Следовательно, петля L_H, вдоль которой берется интеграл (2.24), огибает кратные полюса подынтегральной функции. Эти случаи особенно интересны, т.к. именно такие функции встречаются в приложениях. Для изучения этого случая мы снова воспользуемся методом малого параметра. Нам здесь удобнее работать в терминах параметров G-функции, т.к. в этом случае все полюса явно разбиты на последовательности точек с равным - единичным шагом. Итак, для G-функции этот случай характеризуется тем, что какие-либо два из ее первых пяти нижних параметров (обозначим их $b_1,\dots,b_5$) отличаются на некоторое r - целое число, т.е. выполняется одно из соотношений:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}-\frac{s}{6}+r=\frac{\nu}{6},\frac{\nu}{6}+\frac{1}{3},\frac{\nu}{6}+\frac{2}{3}\\ \frac{5}{6}-\frac{s}{6}+r=\frac{\nu}{6},\frac{\nu}{6}+\frac{1}{3},\frac{\nu}{6}+\frac{2}{3}\Rightarrow\end{array}\right.$$

$\Rightarrow s_i=a)\,2-\nu+6r,\ b)\,-\nu+6r,\ c)\,-2-\nu+6r,\ d)\,5-\nu+6r,\ e)\,3-\nu+6r,\ f)\,1-\nu+6r.$

Или, используя введенное ранее обозначение $\lambda = s + \nu$,

$$\lambda_i = a)\ 2 + 6r,\ \ b)\ 6r,\ \ c)\ -2 + 6r,\ \ d)\ 5 + 6r,\ \ e)\ 3 + 6r,\ \ f)\ 1 + 6r.$$

С учетом $\lambda \notin \mathbf{\Lambda}$ имеем $r \geq 0$.

В этом случае два из пяти слагаемых из формулы (2.32) устремляются в бесконечность, и их сумма образует неопределенность вида $\infty - \infty$, которая, впрочем, всегда может быть раскрыта [42].

Рассмотрим сначала случай $r = 0$. От значения λ_i зависит, какие именно слагаемые станут неограниченными. А именно, обозначив сумму двух "бесконечных" слагаемых Δ_λ, а сумму остальных трех - Ξ_λ, так что $W_s^\nu = \Delta_\lambda + \Xi_\lambda$; имеем:

λ_i	0	1	2	3
Δ_λ	$A_1^\lambda + A_4^\lambda$	$A_2^\lambda + A_5^\lambda$	$A_1^\lambda + A_3^\lambda$	$A_2^\lambda + A_4^\lambda$
Ξ_λ	$A_2^\lambda + A_3^\lambda + A_5^\lambda$	$A_1^\lambda + A_3^\lambda + A_4^\lambda$	$A_2^\lambda + A_4^\lambda + A_5^\lambda$	$A_1^\lambda + A_3^\lambda + A_5^\lambda$

(продолжение)

λ_i	-2	5
Δ_λ	$A_1^\lambda + A_5^\lambda$	$A_2^\lambda + A_3^\lambda$
Ξ_λ	$A_2^\lambda + A_3^\lambda + A_4^\lambda$	$A_1^\lambda + A_4^\lambda + A_5^\lambda$

Неопределенность всегда образуется одним из первых двух слагаемых A_1^λ, A_2^λ и одним из $A_3^\lambda, A_4^\lambda, A_5^\lambda$. Для удобства дальнейших выкладок обозначим первое "бесконечное" слагаемое A_1^λ, второе - A_3^λ, оставшееся из первых двух слагаемых - A_2^λ и остальные - A_4^λ, A_5^λ в произвольном порядке. Тогда

$$\Delta_\lambda = A_1^\lambda + A_3^\lambda,$$

$$\Xi_\lambda = A_2^\lambda + A_4^\lambda + A_5^\lambda.$$

Перенумеруем также первые пять "нижних" параметров функции $G_{2,8}^{5,2}$ $b_1, \ldots, b_5$ так, чтобы $b_1 = b_3$, b_2 - оставшийся из первых двух параметров, b_4 и b_5 - оставшиеся два, условимся также, что b_4 соответствует слагаемому A_4^λ (т.е. A_4^λ содержит множитель ρ^{b_4}), а b_5 соответствует A_5^λ - это будет важно в пункте 7:

λ_i	0	1	2	3	-2	5
s_i	$-\nu$	$1-\nu$	$2-\nu$	$3-\nu$	$-2-\nu$	$5-\nu$
$b_1 = b_3$	$\frac{1}{3} + \frac{\nu}{6}$	$\frac{2}{3} + \frac{\nu}{6}$	$\frac{\nu}{6}$	$\frac{1}{3} + \frac{\nu}{6}$	$\frac{2}{3} + \frac{\nu}{6}$	$\frac{\nu}{6}$
b_2	$\frac{5}{6} + \frac{\nu}{6}$	$\frac{1}{6} + \frac{\nu}{6}$	$\frac{1}{2} + \frac{\nu}{6}$	$-\frac{1}{6} + \frac{\nu}{6}$	$\frac{7}{6} + \frac{\nu}{6}$	$-\frac{1}{2} + \frac{\nu}{6}$
b_4	$\frac{\nu}{6}$	$\frac{\nu}{6}$	$\frac{1}{3} + \frac{\nu}{6}$	$\frac{\nu}{6}$	$\frac{\nu}{6}$	$\frac{1}{3} + \frac{\nu}{6}$
b_5	$\frac{2}{3} + \frac{\nu}{6}$	$\frac{1}{3} + \frac{\nu}{6}$	$\frac{2}{3} + \frac{\nu}{6}$	$\frac{2}{3} + \frac{\nu}{6}$	$\frac{1}{3} + \frac{\nu}{6}$	$\frac{2}{3} + \frac{\nu}{6}$

Займемся раскрытием неопределенности. Пусть $\lambda = \lambda_i + 6\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Выпишем в общем виде неопределенность $\Delta_{\lambda_i+6\varepsilon}$ и устремим ε к нулю.

$$\Delta_{\lambda_i+6\varepsilon} = C_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1+\frac{\nu}{3}-\varepsilon)} \Gamma\left[\begin{array}{ll} a_1+\varepsilon, & a_2+\varepsilon \\ 1+\frac{\nu}{3}-a_1-\varepsilon, & 1+\frac{\nu}{3}-a_2-\varepsilon \end{array}\right] \rho^{b_1-\varepsilon} \times$$

$$\times {}_1F_6\left[\begin{array}{l} 1; \\ 1-a_1-\varepsilon, 1-a_2-\varepsilon, 1-\varepsilon, 1+\frac{\nu}{3}-a_1-\varepsilon, 1+\frac{\nu}{3}-a_2-\varepsilon, 1+\frac{\nu}{3}-\varepsilon; \end{array} -\rho\right] -$$

$$-C_2 \frac{1}{\varepsilon} \Gamma\left[\begin{array}{llll} 1-\varepsilon, & d_1-\varepsilon, & d_2+\varepsilon, & d_3+\varepsilon \\ 1+\frac{\nu}{3}, & 1-a_1+\frac{\nu}{3}, & 1-a_2+\frac{\nu}{3} & \end{array}\right] \rho^{b_3} \times$$

$$\times {}_0F_5\left(1-a_1, 1-a_2, 1-a_1+\frac{\nu}{3}, 1-a_2+\frac{\nu}{3}, 1+\frac{\nu}{3}; -\rho\right). \qquad (2.37)$$

Введенные константы при различных значениях λ_i принимают значения:

λ_i	0	1	2	3	-2	5
a_1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
a_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
d_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
d_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
d_3	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
C_1	π	$-\pi$	π	$-\pi$	π	$-\pi$
C_2	$-2\sqrt{3}\pi$	$3\sqrt{3}\pi$	$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$	$-2\sqrt{3}\pi$	$3\sqrt{3}\pi$	$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Разложим Γ-функции в ряд по степеням ε.

$$\Gamma\left[\begin{array}{lll} 1+\varepsilon, & a_1+\varepsilon, & a_2+\varepsilon \\ 1+\frac{\nu}{3}-\varepsilon, & 1+\frac{\nu}{3}-a_1-\varepsilon, & 1+\frac{\nu}{3}-a_2-\varepsilon \end{array}\right] =$$

$$= \Gamma\left[\begin{array}{lll} a_1, & a_2 & \\ 1+\frac{\nu}{3}, & 1+\frac{\nu}{3}-a_1, & 1+\frac{\nu}{3}-a_2 \end{array}\right] \times$$

$$\times \frac{1+\varepsilon\left(\psi(1)+\psi(a_1)+\psi(a_2)\right)+O\left(\varepsilon^2\right)}{1-\varepsilon\left(\psi\left(1+\frac{\nu}{3}\right)+\psi\left(1-a_1+\frac{\nu}{3}\right)+\psi\left(1-a_2+\frac{\nu}{3}\right)\right)+O\left(\varepsilon^2\right)},$$

разложение в ряд экспоненты дает:

$$\rho^{b_1-\varepsilon} = \rho^{b_1}\left(1-\varepsilon\ln\rho+O\left(\varepsilon^2\right)\right).$$

Используя формулу разложения в ряд символов Похгаммера, перепишем гипергеометрическую функцию в виде:

$${}_1F_6\left[\begin{array}{l} 1; \\ 1-a_1-\varepsilon, 1-a_2-\varepsilon, 1-\varepsilon, 1+\frac{\nu}{3}-a_1-\varepsilon, 1+\frac{\nu}{3}-a_2-\varepsilon, 1+\frac{\nu}{3}-\varepsilon; \end{array} -\rho\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-a_1)_k \left(1-a_1+\frac{\nu}{3}\right)_k (1-a_2)_k \left(1-a_2+\frac{\nu}{3}\right)_k \left(1+\frac{\nu}{3}\right)_k} \frac{(-\rho)^k}{k!} \times$$

$$\times \left[1 - \varepsilon \left(\psi(1-a_1+k) + \psi\left(1-a_1+\frac{\nu}{3}+k\right) + \psi(1-a_2+k) + \psi\left(1-a_2+\frac{\nu}{3}+k\right) + \right.\right.$$

$$+\psi(1+k) + \psi\left(1+\frac{\nu}{3}+k\right) - \psi(1-a_1) - \psi\left(1-a_1+\frac{\nu}{3}\right) - \psi(1-a_2) -$$

$$\left.\left. -\psi\left(1-a_2+\frac{\nu}{3}\right) - \psi(1) - \psi\left(1+\frac{\nu}{3}\right)\right) + O\left(\varepsilon^2\right)\right]^{-1}.$$

Как и раньше, разложим Γ-функции из второго слагаемого (2.37) - A_3^{λ}:

$$\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(d_1-\varepsilon)\Gamma(d_2+\varepsilon)\Gamma(d_3+\varepsilon) =$$

$$= \Gamma(d_1)\Gamma(d_2)\Gamma(d_3)\left(1 + \varepsilon\left(-\psi(1) - \psi(d_1) + \psi(d_2) + \psi(d_3)\right) + O\left(\varepsilon^2\right)\right).$$

Замечая, что $C_1\Gamma(a_1)\Gamma(a_2) = C_2\Gamma(d_1)\Gamma(d_2)\Gamma(d_3)$, введя обозначение

$$\Psi_0(k) = \psi(1-a_1+k) + \psi\left(1-a_1+\frac{\nu}{3}+k\right) + \psi(1-a_2+k) + \psi\left(1-a_2+\frac{\nu}{3}+k\right) +$$

$$+\psi(1+k) + \psi\left(1+\frac{\nu}{3}+k\right),$$

устремляя ε к нулю и подставляя значение $\rho = \left(\frac{z}{6}\right)^6$, имеем

$$\Delta_{\lambda_i+6\varepsilon} \to \Delta_{\lambda_i} = \left(\frac{z}{6}\right)^{6b_1} C_1 \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(1+\frac{\nu}{3})\Gamma(1-a_1+\frac{\nu}{3})\Gamma(1-a_2+\frac{\nu}{3})} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi_0(k) - 6\ln\left(\frac{z}{6}\right)}{(1-a_1)_k \left(1-a_1+\frac{\nu}{3}\right)_k (1-a_2)_k \left(1-a_2+\frac{\nu}{3}\right)_k (1)_k \left(1+\frac{\nu}{3}\right)_k} \left(-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)^k. \tag{2.38}$$

Пределы слагаемых из (2.32) с номерами $j = 2, 4, 5$ равны $A_j^{\lambda_i+6\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} A_j^{\lambda_i}$, тогда окончательный результат можно представить в виде:

$$\Omega_s^{\nu}(z) = \frac{1}{6\pi}\left(\Delta_{\lambda_i} + \Xi_{\lambda_i}\right) = \frac{1}{6\pi}\left(\Delta_{\lambda_i} + A_2^{\lambda_i} + A_4^{\lambda_i} + A_5^{\lambda_i}\right). \tag{2.39}$$

Из формул (2.38) и (2.39) в частности следует, что ω_1^0 имеет особенность вида $x^4 \ln x$, а функция ω_0^0 - вида $x^2 \ln x$, что согласуется с замечанием из параграфа 2.4 стр. 36 и (ω_0^0) с замечанием со страницы 308 монографии [27].

Перейдем теперь к рассмотрению случая $r > 0$. Приведем вспомогательные таблицы, аналогичные таблицам для случая $r = 0$:

(i) Неопределенности:

λ_i	$6r$	$6r+1$	$6r+2$	$6r+3$
Δ_{λ_i}	$A_1^{\lambda_i} + A_4^{\lambda_i}$	$A_2^{\lambda_i} + A_5^{\lambda_i}$	$A_1^{\lambda_i} + A_3^{\lambda_i}$	$A_2^{\lambda_i} + A_4^{\lambda_i}$
Ξ_{λ_i}	$A_2^{\lambda_i} + A_3^{\lambda_i} + A_5^{\lambda_i}$	$A_1^{\lambda_i} + A_3^{\lambda_i} + A_4^{\lambda_i}$	$A_2^{\lambda_i} + A_4^{\lambda_i} + A_5^{\lambda_i}$	$A_1^{\lambda_i} + A_3^{\lambda_i} + A_5^{\lambda_i}$

(продолжение)

λ_i	$6r-2$	$6r+5$
Δ_{λ_i}	$A_1^{\lambda_i}+A_5^{\lambda_i}$	$A_2^{\lambda_i}+A_3^{\lambda_i}$
Ξ_{λ_i}	$A_2^{\lambda_i}+A_3^{\lambda_i}+A_4^{\lambda_i}$	$A_1^{\lambda_i}+A_4^{\lambda_i}+A_5^{\lambda_i}$

Снова перенумеруем A_i^λ, $i=1,\ldots,5$ так, чтобы $\Delta_\lambda = A_1^\lambda + A_3^\lambda$, $\Xi_\lambda = A_2^\lambda + A_4^\lambda + A_5^\lambda$.

(ii) Условившись, по аналогии со случаем $r=0$, $b_3 - b_1 = r \in \mathbf{N}$, параметры G-функции равны:

λ_i	$6r$	$6r+1$	$6r+2$	$6r+3$	$6r-2$	$6r+5$
s_i	$6r-\nu$	$6r+1-\nu$	$6r+2-\nu$	$6r+3-\nu$	$6r-2-\nu$	$6r+5-\nu$
$b_1+r=b_3$	$\frac{1}{3}+\frac{\nu}{6}$	$\frac{2}{3}+\frac{\nu}{6}$	$\frac{\nu}{6}$	$\frac{1}{3}+\frac{\nu}{6}$	$\frac{2}{3}+\frac{\nu}{6}$	$\frac{\nu}{6}$
b_2	$\frac{5}{6}+\frac{\nu}{6}-r$	$\frac{1}{6}+\frac{\nu}{6}-r$	$\frac{1}{2}+\frac{\nu}{6}-r$	$-\frac{1}{6}+\frac{\nu}{6}-r$	$\frac{7}{6}+\frac{\nu}{6}-r$	$-\frac{1}{2}+\frac{\nu}{6}-r$
b_4	$\frac{\nu}{6}$	$\frac{\nu}{6}$	$\frac{1}{3}+\frac{\nu}{6}$	$\frac{\nu}{6}$	$\frac{\nu}{6}$	$\frac{1}{3}+\frac{\nu}{6}$
b_5	$\frac{2}{3}+\frac{\nu}{6}$	$\frac{1}{3}+\frac{\nu}{6}$	$\frac{2}{3}+\frac{\nu}{6}$	$\frac{2}{3}+\frac{\nu}{6}$	$\frac{1}{3}+\frac{\nu}{6}$	$\frac{2}{3}+\frac{\nu}{6}$

Снова выпишем неопределенность $\Delta_{\lambda_i+6\varepsilon}$ и устремим ε к нулю:

$$\Delta_{\lambda_i+6\varepsilon} = C_1 \Gamma \left[\begin{array}{lll} r+\varepsilon, & a_1+\varepsilon, & a_2+\varepsilon \\ 1+\frac{\nu}{3}-r-\varepsilon, & 1+\frac{\nu}{3}-a_1-\varepsilon, & 1+\frac{\nu}{3}-a_2-\varepsilon \end{array} \right] \rho^{b_1-\varepsilon} \times$$

$$\times {}_1F_6 \left[\begin{array}{l} 1; \\ 1-a_1-\varepsilon, 1-a_2-\varepsilon, 1-r-\varepsilon, 1+\frac{\nu}{3}-a_1-\varepsilon, 1+\frac{\nu}{3}-a_2-\varepsilon, 1+\frac{\nu}{3}-r-\varepsilon; \end{array} -\rho \right] -$$

$$-C_2 \Gamma \left[\begin{array}{llll} -r-\varepsilon, & d_1-\varepsilon, & d_2+\varepsilon, & d_3+\varepsilon \\ 1+\frac{\nu}{3}, & 1-a_1+r+\frac{\nu}{3}, & 1-a_2+r+\frac{\nu}{3} & \end{array} \right] \rho^{b_1+r} \times$$

$$\times {}_0F_5 \left(1-a_1+r, 1-a_2+r, 1-a_1+r+\frac{\nu}{3}, 1-a_2+r+\frac{\nu}{3}, 1+\frac{\nu}{3}; -\rho \right). \tag{2.40}$$

Таблица констант:

λ_i	$6r$	$6r+1$	$6r+2$	$6r+3$	$6r-2$	$6r+5$
a_1	$r-\frac{1}{3}$	$r-\frac{2}{3}$	$r+\frac{1}{3}$	$r-\frac{1}{3}$	$r-\frac{2}{3}$	$r+\frac{1}{3}$
a_2	$r+\frac{1}{3}$	$r-\frac{1}{3}$	$r+\frac{2}{3}$	$r+\frac{1}{3}$	$r-\frac{1}{3}$	$r+\frac{2}{3}$
d_1	$\frac{1}{2}-r$	$-\frac{1}{2}-r$	$\frac{1}{2}-r$	$-\frac{1}{2}-r$	$\frac{1}{2}-r$	$-\frac{1}{2}-r$
d_2	$r+\frac{1}{2}$	$r+1$	$r+\frac{1}{2}$	$r+1$	$r+\frac{1}{2}$	$r+1$
d_3	$r+1$	$r+\frac{3}{2}$	$r+1$	$r+\frac{3}{2}$	$r+1$	$r+\frac{3}{2}$
C_1	π	$-\pi$	π	$-\pi$	π	$-\pi$
C_2	$-2\sqrt{3}\pi$	$3\sqrt{3}\pi$	$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$	$-2\sqrt{3}\pi$	$3\sqrt{3}\pi$	$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Разложения, аналогичные произведенным ранее, дают:

$$\Gamma \left[\begin{array}{lll} r+\varepsilon, & a_1+\varepsilon, & a_2+\varepsilon \\ 1+\frac{\nu}{3}-r-\varepsilon, & 1+\frac{\nu}{3}-a_1-\varepsilon, & 1+\frac{\nu}{3}-a_2-\varepsilon \end{array} \right] =$$

$$= \Gamma \left[\begin{array}{lll} r, & a_1, & a_2 \\ 1 + \frac{\nu}{3} - r, & 1 + \frac{\nu}{3} - a_1, & 1 + \frac{\nu}{3} - a_2 \end{array} \right] \times$$

$$\times \frac{1 + \varepsilon\left(\psi(r) + \psi(a_1) + \psi(a_2)\right) + O\left(\varepsilon^2\right)}{1 - \varepsilon\left(\psi\left(1 - r + \frac{\nu}{3}\right) + \psi\left(1 - a_1 + \frac{\nu}{3}\right) + \psi\left(1 - a_2 + \frac{\nu}{3}\right)\right) + O\left(\varepsilon^2\right)}, \quad (2.41)$$

$${}_1F_6 \left[\begin{array}{l} 1; \\ 1 - a_1 - \varepsilon, 1 - a_2 - \varepsilon, 1 - r - \varepsilon, 1 + \frac{\nu}{3} - a_1 - \varepsilon, 1 + \frac{\nu}{3} - a_2 - \varepsilon, 1 + \frac{\nu}{3} - r - \varepsilon; \end{array} \ -\rho \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\rho)^k}{(1 - a_1)_k \left(1 - a_1 + \frac{\nu}{3}\right)_k (1 - a_2)_k \left(1 - a_2 + \frac{\nu}{3}\right)_k \left(1 + \frac{\nu}{3} - r\right)_k (1 - r - \varepsilon)_k} \times$$

$$\times \left[1 - \varepsilon\left(\psi(1 - a_1 + k) + \psi\left(1 - a_1 + \frac{\nu}{3} + k\right) + \psi(1 - a_2 + k) + \psi\left(1 - a_2 + \frac{\nu}{3} + k\right) + \right.\right.$$

$$+\psi\left(1 - r + \frac{\nu}{3} + k\right) - \psi(1 - a_1) - \psi\left(1 - a_1 + \frac{\nu}{3}\right) - \psi(1 - a_2) -$$

$$\left.\left. -\psi\left(1 - a_2 + \frac{\nu}{3}\right) - \psi\left(1 - r + \frac{\nu}{3}\right)\right) + O\left(\varepsilon^2\right)\right]^{-1}.$$

При разложении $(1 - r - \varepsilon)_k$ возможны следующие два варианта:

$$1) k < r : (1 - r - \varepsilon)_k = (-1)^k (r - k)_k (1 + \varepsilon(\psi(r) - \psi(r - k)) + \ldots);$$

$$2) k \geq r : (1 - r - \varepsilon)_k = \varepsilon(-1)^r (k - r)!(r - 1)!(1 + \varepsilon(\psi(r) - \psi(1 + k - r)) + \ldots).$$

Тогда, продолжая разложение обобщенной гипергеометрической функции, имеем:

$${}_1F_6 \left[\begin{array}{l} 1; \\ 1 - a_1 - \varepsilon, 1 - a_2 - \varepsilon, 1 - r - \varepsilon, 1 + \frac{\nu}{3} - a_1 - \varepsilon, 1 + \frac{\nu}{3} - a_2 - \varepsilon, 1 + \frac{\nu}{3} - r - \varepsilon; \end{array} \ -\rho \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\rho^k}{(1 - a_1)_k \left(1 - a_1 + \frac{\nu}{3}\right)_k (1 - a_2)_k \left(1 - a_2 + \frac{\nu}{3}\right)_k \left(1 + \frac{\nu}{3} - r\right)_k (r - k)_k} \times$$

$$\times \left[1 - \varepsilon\left(\psi(1 - a_1 + k) + \psi\left(1 - a_1 + \frac{\nu}{3} + k\right) + \psi(1 - a_2 + k) + \psi\left(1 - a_2 + \frac{\nu}{3} + k\right) + \right.\right.$$

$$+\psi(r - k) + \psi\left(1 - r + \frac{\nu}{3} + k\right) - \psi(1 - a_1) - \psi\left(1 - a_1 + \frac{\nu}{3}\right) - \psi(1 - a_2) -$$

$$\left.\left. -\psi\left(1 - a_2 + \frac{\nu}{3}\right) - \psi(r) - \psi\left(1 - r + \frac{\nu}{3}\right)\right) + O\left(\varepsilon^2\right)\right]^{-1} +$$

$$+ \frac{(-1)^r}{\varepsilon(r - 1)!} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(-\rho)^k}{(1 - a_1)_k \left(1 - a_1 + \frac{\nu}{3}\right)_k (1 - a_2)_k \left(1 - a_2 + \frac{\nu}{3}\right)_k \left(1 + \frac{\nu}{3} - r\right)_k (k - r)!} \times$$

$$\times \left[1 - \varepsilon\left(\psi(1 - a_1 + k) + \psi\left(1 - a_1 + \frac{\nu}{3} + k\right) + \psi(1 - a_2 + k) + \psi\left(1 - a_2 + \frac{\nu}{3} + k\right) + \right.\right.$$

$$+\psi(1 - r + k) + \psi\left(1 - r + \frac{\nu}{3} + k\right) - \psi(1 - a_1) - \psi\left(1 - a_1 + \frac{\nu}{3}\right) - \psi(1 - a_2) -$$

$$-\psi\left(1-a_2+\frac{\nu}{3}\right)-\psi(r)-\psi\left(1-r+\frac{\nu}{3}\right)\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\Big]^{-1}. \qquad (2.42)$$

Второе слагаемое (2.42), при замене в сумме пределов суммирования, примет вид:

$$\frac{\rho^r}{\varepsilon(1-a_1)_r\left(1-a_1+\frac{\nu}{3}\right)_r(1-a_2)_r\left(1-a_2+\frac{\nu}{3}\right)_r\left(1+\frac{\nu}{3}-r\right)_r(r-1)!}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-a_1+r)_k\left(1-a_1+r+\frac{\nu}{3}\right)_k(1-a_2+r)_k\left(1-a_2+r+\frac{\nu}{3}\right)_k\left(1+\frac{\nu}{3}\right)_k}\frac{(-\rho)^k}{k!}\times$$

$$\times\Big[1-\varepsilon\left(\psi(1-a_1+r+k)+\psi\left(1-a_1+r+\frac{\nu}{3}+k\right)+\right.$$

$$+\psi(1-a_2+r+k)+\psi\left(1-a_2+r+\frac{\nu}{3}+k\right)+$$

$$+\psi(1+k)+\psi\left(1+\frac{\nu}{3}+k\right)-$$

$$-\psi(1-a_1)-\psi\left(1-a_1+\frac{\nu}{3}\right)-\psi(1-a_2)-\psi\left(1-a_2+\frac{\nu}{3}\right)-$$

$$\left.-\psi(r)-\psi\left(1-r+\frac{\nu}{3}\right)\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\Big]^{-1}.$$

Умножим коэффициент при получившейся сумме на Г-функции из правой части (2.41):

$$\Gamma\left[\begin{array}{lll} r, & a_1, & a_2 \\ 1+\frac{\nu}{3}-r, & 1+\frac{\nu}{3}-a_1, & 1+\frac{\nu}{3}-a_2 \end{array}\right]\times$$

$$\times\frac{\rho^r}{(1-a_1)_r\left(1-a_1+\frac{\nu}{3}\right)_r(1-a_2)_r\left(1-a_2+\frac{\nu}{3}\right)_r\left(1+\frac{\nu}{3}-r\right)_r(r-1)!}=$$

$$=\frac{\rho^r}{(1-a_1)_r(1-a_2)_r}\Gamma\left[\begin{array}{lll} a_1, & a_2 & \\ 1+\frac{\nu}{3}, & 1+\frac{\nu}{3}-a_1+r, & 1+\frac{\nu}{3}-a_2+r \end{array}\right].$$

Заметив, что один из параметров $d_i, i=2,3$ равен $1+r$, пусть, например, $d_3=1+r$, найдем асимптотику Г-функций из второго слагаемого (2.40) - A_3^{λ}:

$$\Gamma\left[\begin{array}{llll} -r-\varepsilon, & d_1-\varepsilon, & d_2+\varepsilon, & d_3+\varepsilon \\ 1+\frac{\nu}{3}, & 1-a_1+r+\frac{\nu}{3}, & 1-a_2+r+\frac{\nu}{3} & \end{array}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^r}{\varepsilon}\Gamma\left[\begin{array}{lll} d_1, & d_2 & \\ 1-a_1+r+\frac{\nu}{3}, & 1-a_2+r+\frac{\nu}{3}, & 1+\frac{\nu}{3} \end{array}\right]\left(1-\varepsilon\left(\psi(d_1)-\psi(d_2)\right)+\ldots\right).$$

Соберем коэффициенты при суммах:

λ_i	$6r$	$6r+1$	$6r+2$	$6r+3$	$6r-2$	$6r+5$
$C_1\dfrac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{(1-a_1)_r(1-a_2)_r}$	$-2\pi^2\sqrt{3}$	$-3\pi^2\sqrt{3}$	$\dfrac{2\pi^2}{\sqrt{3}}$	$2\pi^2\sqrt{3}$	$3\pi^2\sqrt{3}$	$-\dfrac{2\pi^2}{\sqrt{3}}$
$(-1)^r C_2\Gamma(d_1)\Gamma(d_2)$	$-2\pi^2\sqrt{3}$	$-3\pi^2\sqrt{3}$	$\dfrac{2\pi^2}{\sqrt{3}}$	$2\pi^2\sqrt{3}$	$3\pi^2\sqrt{3}$	$-\dfrac{2\pi^2}{\sqrt{3}}$

Заметим, что $C_1 \dfrac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{(1-a_1)_r(1-a_2)_r} = (-1)^r C_2 \Gamma(d_1)\Gamma(d_2)$.

Введем обозначение:

$$f = \frac{(-1)^r C_2 \Gamma(d_1)\Gamma(d_2)}{\Gamma\left(1-a_1+r+\frac{\nu}{3}\right)\Gamma\left(1-a_2+r+\frac{\nu}{3}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{3}\right)}.$$

Теперь можно собрать первое слагаемое (2.40)

$$A_1^{\lambda_i+6\varepsilon} = C_1 \Gamma \left[\begin{array}{lll} r+\varepsilon, & a_1+\varepsilon, & a_2+\varepsilon \\ 1+\frac{\nu}{3}-r-\varepsilon, & 1+\frac{\nu}{3}-a_1-\varepsilon, & 1+\frac{\nu}{3}-a_2-\varepsilon \end{array} \right] \rho^{b_1-\varepsilon}\Sigma +$$

$$+f\rho^{b_1+r}\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-a_1+r)_k\left(1-a_1+r+\frac{\nu}{3}\right)_k (1-a_2+r)_k\left(1-a_2+r+\frac{\nu}{3}\right)_k\left(1+\frac{\nu}{3}\right)_k}\frac{(-\rho)^k}{k!}\times$$

$$\times\left[1+\varepsilon\left(\psi(r)+\psi(a_1)+\psi(a_2)-\ln\rho\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\right]\times$$

$$\times\left[1-\varepsilon\left(\psi(1-a_1+r+k)+\psi\left(1-a_1+r+\frac{\nu}{3}+k\right)+\right.\right.$$

$$+\psi(1-a_2+r+k)+\psi\left(1-a_2+r+\frac{\nu}{3}+k\right)+$$

$$\left.\left.+\psi(1+k)+\psi\left(1+\frac{\nu}{3}+k\right)-\psi(1-a_1)-\psi(1-a_2)-\psi(r)\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\right]^{-1},$$

где Σ - сумма $\sum\limits_{k=0}^{r-1}$ из (2.42). Простые вычисления дают:

$$\psi(d_1)-\psi(d_2)=0,$$

$$\psi(a_1)-\psi(1-a_1)+\psi(a_2)-\psi(1-a_2)=0$$

при любом сочетании a_1, a_2, d_1, d_2, соответствующем конкретному значению λ_i. Снова, как в случае $r=0$, обозначив

$$\Psi(k)=\psi(1-a_1+r+k)+\psi\left(1-a_1+r+\frac{\nu}{3}+k\right)+\psi(1-a_2+r+k)+$$

$$+\psi\left(1-a_2+r+\frac{\nu}{3}+k\right)+\psi(1+k)+\psi\left(1+\frac{\nu}{3}+k\right),$$

и, перейдя к пределу при $\varepsilon\to 0$ (обоснование предельного перехода под знаком суммы точно такое же как в параграфе 2.4), имеем:

$$\Delta_{\lambda_i} = C_1\Gamma\left[\begin{array}{lll} r, & a_1, & a_2 \\ 1+\frac{\nu}{3}-r, & 1+\frac{\nu}{3}-a_1, & 1+\frac{\nu}{3}-a_2\end{array}\right]\left(\frac{z}{6}\right)^{6b_1}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{r-1}\frac{\left(\frac{z}{6}\right)^{6k}}{(1-a_1)_k\left(1-a_1+\frac{\nu}{3}\right)_k(1-a_2)_k\left(1-a_2+\frac{\nu}{3}\right)_k\left(1+\frac{\nu}{3}-r\right)_k(r-k)_k}+ \tag{2.43}$$

$$+C_1\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{(1-a_1)_r(1-a_2)_r\Gamma\left(1-a_1+r+\frac{\nu}{3}\right)\Gamma\left(1-a_2+r+\frac{\nu}{3}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{3}\right)}\left(\frac{z}{6}\right)^{6(b_1+r)}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Psi(k)-6\ln\left(\frac{z}{6}\right)}{(1-a_1+r)_k\left(1-a_1+r+\frac{\nu}{3}\right)_k(1-a_2+r)_k\left(1-a_2+r+\frac{\nu}{3}\right)_k\left(1+\frac{\nu}{3}\right)_k}\times$$

$$\times\frac{\left(-\left(\frac{z}{6}\right)^6\right)^k}{k!}.$$

В дальнейшем, ссылаясь на слагаемые приведенной выше формулы для Δ_{λ_i}, первое из них мы будем обозначать $\Delta^1_{\lambda_i}$, а второе - $\Delta^2_{\lambda_i}$.

Окончательно, искомая функция снова может быть записана в виде

$$\Omega_s^{\nu}(z)=\frac{1}{6\pi}\left(\Delta_{\lambda_i}+\Xi_{\lambda_i}\right)=\frac{1}{6\pi}\left(\Delta_{\lambda_i}+A_2^{\lambda_i}+A_4^{\lambda_i}+A_5^{\lambda_i}\right). \qquad (2.44)$$

Несложно удостоверится, что формула (2.39) является частным случаем (2.44) при $r=0$, условившись, что $\sum\limits_{0}^{-1}=0$.

5) Следующая возможность, которую мы рассмотрим, - это наличие полюсов второго порядка одновременно с уничтожением простых полюсов и/или понижением порядка полюсов со второго до первого. Наличие полюсов второго порядка соответствует выполнению условия $s+\nu=\lambda\in\mathbf{Z}\setminus\mathbf{\Lambda}$. Пользуясь обозначениями предыдущего пункта для параметров $b_1,\ldots,b_5$, $b_3=b_1+r$ и слагаемых $A_1^{\lambda},\ldots,A_5^{\lambda}$, произведение Γ-функций вида $\Gamma(b_i+u)$, $i=1,\ldots,5$ из числителя функции $\mathcal{G}_s^{\nu}(z,u)$ (в обозначениях первой главы, функция $B^+(u)$) имеет простые полюса в точках

$$\begin{gathered}-b_1,\ -b_1-1,\ldots,-b_1-r+1;\\ -b_2,\ -b_2-1,\ -b_2-2,\ldots;\\ -b_4,\ -b_4-1,\ -b_4-2,\ldots;\\ -b_5,\ -b_5-1,\ -b_5-2,\ldots\end{gathered}$$

и полюса второго порядка в точках

$$-b_1-r=-b_3,\ -b_1-r-1=-b_3-1,\ -b_1-r-2=-b_3-2,\ldots$$

Одновременно с этим имеет место совпадение полюсов знаменателя $\mathcal{G}_s^{\nu}(z,u)$ (функции $B^-(u)$) с полюсами $B^+(u)$. Рассмотрим сначала простейший случай - уничтожения происходят только в цепочке $-b_2,\ -b_2-1,\ -b_2-2,\ldots$, тогда, обозначив соответствующий коэффициент знаменателя b_6 (с полюсами в точках $1-b_6,\ 2-b_6,\ 3-b_6,\ldots$), условие взаимного уничтожения r_2 полюсов в этих двух цепочках имеет вид: $b_6-b_2=r_2$. Этот случай имеет место при $s-\lambda=\mu\in\mathbf{M}$, тогда $\nu=(\lambda-\mu)/2$ - полуцелое. При

ν целом (см. пункты 6 и 7 далее), при соответствующем выборе нумерации, $b_6-b_3=r_3,\ b_7-b_4=r_4,\ b_8-b_5=r_5,\ r_3,r_4,r_5\in\mathbf{Z}$, а следовательно $b_6-b_1=b_6-b_3+r=r_3+r$, причем, при $\nu\in\mathbf{N_0},\ \mu\in\mathbf{M}$ происходит уничтожение только простых полюсов, область полюсов второго порядка не "захлестывается".

Итак, пусть $\lambda=(6r+\tilde\lambda)\in\mathbf{Z}\setminus\mathbf{\Lambda},\ \tilde\lambda\in\{-2,0,1,2,3,5\},\ r\in\mathbf{N_0},\ \mu=(6r_2+\tilde\mu)\in\mathbf{M},\ r_2\in\mathbf{N},\ (\nu+1/2)\in\mathbf{Z}$, где, как и раньше, $\tilde\mu\in\{-2,0,1,2,3,5\}$. Тогда, пользуясь результатом предыдущего пункта,

$$\Omega_s^\nu(z)=\frac{1}{6\pi}\left(\Delta_\lambda+A_2^{\lambda,(r_2)}+A_4^\lambda+A_5^\lambda\right), \tag{2.45}$$

где $A_2^{\lambda,(r_2)}$ - "усеченное" в принятом нами смысле слагаемое A_2^λ из предыдущего пункта.

6) Пусть теперь ν - целое неотрицательное, а все остальные параметры - как в предыдущем пункте, то есть $\lambda=(6r+\tilde\lambda)\in\mathbf{Z}\setminus\mathbf{\Lambda},\ \tilde\lambda\in\{-2,0,1,2,3,5\},\ r\in\mathbf{N_0},\ \mu=(6r_2+\tilde\mu)\in\mathbf{M},\ \tilde\mu\in\{-2,0,1,2,3,5\},\ r_2\in\mathbf{N},\ \nu\in\mathbf{N_0}$. Тогда уничтожаются r_2 простых полюсов из цепочки $-b_1,\ -b_1-1,\ -b_1-2,\ldots$, но, по-прежнему, область полюсов второго порядка не захватывается - из неотрицательности ν следует $r\geq r_2$:

$$\lambda=\mu+2\nu\ \Rightarrow\ 6r+\tilde\lambda=6r_2+\tilde\mu+2\nu.$$

Окончательно, результат для этого случая снова может быть записан в виде:

$$\Omega_s^\nu(z)=\frac{1}{6\pi}\left(\Delta_\lambda^{1,(r_2)}+\Delta_\lambda^2+A_2^\lambda+A_4^\lambda+A_5^\lambda\right), \tag{2.46}$$

где $\Delta_\lambda^{1,(r_2)}$ как в пункте 4, только нижний предел суммы (2.43) равен r_2.

7) Самый сложный случай - это когда полюса знаменателя функции $\mathcal{H}$ совпадают с полюсами второго порядка числителя. В этом случае $\lambda=(6r+\tilde\lambda)\in\mathbf{Z}\setminus\mathbf{\Lambda},\ \tilde\lambda\in\{-2,0,1,2,3,5\},\ r\in\mathbf{N_0},\ \nu\in-\mathbf{N}$. Тогда $\mu=(\lambda-2\nu)=(6r_2+\tilde\mu)\in\{0\}\cup\{2,3,4,\ldots\}=\{0,2,3,5\}\cup\mathbf{M}$. Это значит, что при $\nu\in-\mathbf{N}$ и $\mu\in\{0,2,3,5\}$ (т.е. $r_2=0$) уничтожаются только простые полюса из цепочек $-b_4-k,\ -b_5-k$ - из одной из них или из обеих, тогда как в цепочке $-b_3-k,\ k=0,1,\ldots$ уничтожений не происходит. Это возможно только при $r=0$. Вообще же условие $\nu\in-\mathbf{N}$ гарантирует уничтожение полюсов во всех точках $-b_1,\ -b_1-1,\ldots,-b_1-r+1$, а следовательно отсутствие суммы Δ_λ^1 в итоговом разложении. Однако, обе эти возможности ($\mu\in\{0,2,3,5\}$ и $\mu\in\mathbf{M}$) мы будем рассматривать вместе, т.к. первая из них естественно получится из второй как частный случай. Сложность этого случая в том, что здесь имеют место полюса

трех типов - простые полюса $\mathcal{H}$ в точках, где ее числитель имеет простые полюса (простые полюса типа (0,0)); простые полюса $\mathcal{H}$ в точках, где ее числитель имеет полюса второго порядка и происходит понижение порядка полюса из-за совпадения с полюсом знаменателя (простые полюса типа (0,1)); полюса второго порядка $\mathcal{H}$ в точках, где ее числитель имеет полюса второго порядка, а знаменатель полюсов не имеет (полюса второго порядка типа (0,0)). Как было показано в главе 1, вычеты во всех этих трех типах полюсов вычисляются по разным формулам. Мы уже вычисляли вычеты в простых полюсах типа (0,0) и в полюсах второго порядка. Для нахождения вычета в простом полюсе типа (0,1) мы воспользуемся формулой из первой главы данной работы. В ее обозначениях

$$A^{+}(u) = \Gamma\left(\frac{2}{3}+\frac{s}{6}-u\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}+\frac{s}{6}-u\right),$$

$$B^{+}(u) = \Gamma\left(\frac{1}{3}-\frac{s}{6}+u\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}-\frac{s}{6}+u\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{6}+u\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{6}+\frac{1}{3}+u\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{6}+\frac{2}{3}+u\right),$$

$$A^{-}(u) = 1,$$

$$B^{-}(u) = \Gamma\left(\frac{\nu}{6}+\frac{1}{3}-u\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{6}+\frac{2}{3}-u\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{6}+1-u\right).$$

$L_1 = \{1,3\}$, $b^{1-} = b_1$, $b_2 - b_1 = r$, $j = 6$, $I_{1,r+k} = \emptyset$ для всех $k = 0,1,\dots$ Тогда

$$\operatorname*{res}_{u=-b_3-k} \mathcal{G}(z,u) = \frac{\Gamma(a_1-r)\Gamma(a_2-r)\Gamma(r_2-r)}{\Gamma(1-b_7+b_3)\Gamma(1-b_8+b_3)}\times$$

$$\times\frac{\pi(-1)^{r+r_2+\lambda}\left(\frac{z}{6}\right)^{6(b_3+k)}}{(1-a_1+r)_k(1-a_2+r)_k(1-r_2+r)_k(1-b_7+b_3)_k(1-b_8+b_3)_k k!},$$

$$k = 0,1,\dots,r_2-r-1.$$

Здесь нам удобнее будет выписать разложение не в виде суммы по двум цепочкам полюсов, как в пункте 3 (формула (2.36), а в виде суммы по четырем цепочкам, как в пунктах 4, 5 и 6 (формулы (2.44), (2.45) и (2.46) соответственно) - частный случай суммы по пяти цепочкам (пункты 1 - (2.32) и 2 - (2.34) и (2.35)). Мы разложим вторую сумму из (2.36) по очевидной формуле:

$$\sum_{k=-\nu}^{\infty} \operatorname*{res}_{u=-\nu-2k} \mathcal{H}(z,u) =$$

$$= \sum_{k=\nu_1}^{\infty} \operatorname*{res}_{u=-\nu-6k} \mathcal{H}(z,u) + \sum_{k=\nu_2}^{\infty} \operatorname*{res}_{u=-\nu-6k-2} \mathcal{H}(z,u) + \sum_{k=\nu_3}^{\infty} \operatorname*{res}_{u=-\nu-6k-4} \mathcal{H}(z,u),$$

где

$$\nu_1 = \left[\frac{-\nu+2}{3}\right],$$

$$\nu_2 = \left[\frac{-\nu+1}{3}\right],$$
$$\nu_3 = \left[\frac{-\nu}{3}\right],$$

где $[a]$ - целая часть действительного числа a, так чтобы $\nu_1+\nu_2+\nu_3 = -\nu$ и $\nu_i - \nu_{i+1} = 0$ или 1, $i = 1, 2$. Однако, нам удобнее ввести другие константы n_1, n_2, n_3, принимающие те же значения, что и ν_1, ν_2, ν_3, но упорядоченные таким образом, что n_1 соответствует цепочке полюсов второго порядка Δ, n_2 - цепочке A_4 и n_3 - цепочке A_5. Формально, используя таблицу параметров b_i из пункта 4, их значения можно вычислить по формулам:

$$n_1 = \left[\frac{-\nu+2}{3} - \left(b_3 - \frac{\nu}{6}\right)\right] = \left[\frac{2}{3} - b_3 - \frac{\nu}{6}\right],$$
$$n_2 = \left[\frac{2}{3} - b_4 - \frac{\nu}{6}\right],$$
$$n_3 = \left[\frac{2}{3} - b_5 - \frac{\nu}{6}\right].$$

Тогда в точках $-b_2, \ -b_2-1, \ldots; \ -b_4-n_2, \ -b_4-n_2-1, \ldots$ и $-b_5-n_3, \ -b_5-n_3-1, \ldots$ функция $\mathcal{G}$ имеет простые полюса типа (0,0); в точках $-b_3, \ -b_3-1, \ldots, -b_3-n_1+1$ функция $\mathcal{G}$ имеет простые полюса типа (0,1) и в точках $-b_3-n_1, \ -b_3-n_1-1, \ldots$ - полюса второго порядка типа (0,0). Искомое разложение записывается в виде:

$$\Omega_s^\nu(z) = \sum_{k=0}^{n_1-1} \frac{\Gamma(a_1-r)\Gamma(a_2-r)\Gamma(r_2-r)}{\Gamma(1-b_7+b_3)\Gamma(1-b_8+b_3)} \times$$
$$\times \frac{\pi(-1)^{r+r_2+\lambda}\left(\frac{z}{6}\right)^{6(b_3+k)}}{(1-a_1+r)_k(1-a_2+r)_k(1-r_2+r)_k(1-b_7+b_3)_k(1-b_8+b_3)_k k!} +$$
$$+\Delta_\lambda^{1,(r_2)}(z) + \Delta_\lambda^{2,(n_1)}(z) + A_2(z) + A_4^{(n_2)}(z) + A_5^{(n_3)}(z). \qquad (2.47)$$

Здесь, как обычно, при $n_1 = 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n_1-1} f_k = 0$. Слагаемое $\Delta_\lambda^{1,(r_2)}$ здесь включено для общности - в данном пункте оно равно нулю. Действительно,

$$-2\nu = \mu - \lambda = 6(r_2 - r) + (\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}) > 0 \Rightarrow r_2 \geq r,$$

а следовательно

$$\Delta_\lambda^{1,(r_2)} = \sum_{k=r_2}^{r-1} f_k = 0.$$

Но в таком виде формула (2.47) может считаться обобщением формул пунктов 4 (2.39) и (2.44), 5 (2.45) и 6 (2.46), доопределив $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ при $-\nu \notin \mathbf{N}$.

Результаты данного раздела могут быть сведены в теорему:

Теорема 2.4. *Пусть дан интеграл*

$$\omega_s^\nu(x) = \int\limits_0^\infty \frac{y^s}{1+y^3} J_\nu(xy)dy, \tag{2.48}$$

где $x > 0$, ν *и* s *- комплексные параметры. Интеграл сходится при*

$$-Re\,\nu - 1 < Re\,s < 7/2. \tag{2.49}$$

Функция

$$\Omega_s^\nu(z) = \frac{1}{6} H_{1,3}^{2,1}\left[\frac{z}{2}\,\middle|\, \begin{matrix} \left(\frac{2}{3} - \frac{s}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ \left(\frac{2}{3} - \frac{s}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{matrix}\right] \tag{2.50}$$

является аналитическим продолжением функции $\omega_s^\nu(x)$ *в область комплексных значений аргумента и параметров при* $s + \nu = \lambda \notin \mathbf{\Lambda} = \{-1\} \cup \{-3, -4, -5, \ldots\}$. *При различных значениях параметров справедливы формулы разложения функции* $\Omega_s^\nu(z)$ *в ряд:*

1) Пусть $\lambda \notin \mathbf{Z}$, $s - \nu = \mu \notin \mathbf{M} = \{4\} \cup \{6, 7, 8, \ldots\}$, $\nu \neq -1, -2, \ldots$. *Тогда, обозначив*

$$\Omega_s^\nu(z) = \frac{1}{6\pi} W_s^\nu\left(\left(\frac{z}{6}\right)^6\right),$$

функция $W_s^\nu(\rho)$ *может быть разложена в ряд по степеням* ρ *по формуле (2.32).*

2) Пусть $s - \nu = \mu \in \mathbf{M}$ *и* $s + \nu = \lambda \notin \mathbf{Z}$. *Тогда при четных и нечетных значениях* μ *функция* $\Omega_s^\nu(z)$ *может быть разложена в ряд по формулам (2.34) и (2.35) соответственно.*

3) Пусть $\nu \in \mathbf{N}$ *и* $s + \nu = \lambda \notin \mathbf{Z}$. *Тогда искомое разложение может быть представлено в виде (2.36).*

4) Пусть $\nu + s = \lambda = 6r + \tilde{\lambda} \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{\Lambda}$, $\tilde{\lambda} \in \{-2, 0, 1, 2, 3, 5\}$, $s - \nu = \mu \notin \mathbf{M}$, $\nu \notin -\mathbf{N}$. *Тогда* $\Omega_s^\nu(z)$ *может быть представлена в виде суммы функций гипергеометрического типа по формулам (2.39) и (2.44) при* $r = 0$ *и* $r > 0$ *соответственно.*

5) Пусть $s + \nu = \lambda \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{\Lambda}$, $s - \nu = \mu \in \mathbf{M}$, $(\nu + 1/2) \in \mathbf{Z}$. *Тогда справедливо разложение (2.45).*

6) Пусть $\lambda \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{\Lambda}$, $\mu \in \mathbf{M}$, $\nu \in \mathbf{N_0}$. *Тогда справедливо разложение (2.46).*

7) Пусть, наконец, $\lambda \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{\Lambda}$, $\nu \in -\mathbf{N}$. *В этом, последнем случае разложение находится по формуле (2.47), которая обобщает формулы (2.39), (2.44), (2.45) и (2.46).*

Различные константы и функции, использованные в этих формулах объяснены в тексте главы.

Данный пример наглядно проиллюстрировал сложности разложения G- (H-) функции в ряд, то, как наличие переменных параметров порождает различные разложения, необходимость рассматривать каждый конкретный случай сочетаний параметров отдельно, сложность применения общих подходов, приведенных в первой главе, а также достоинства и недостатки различных методов (малого параметра и теории вычетов) получения разложений.

2.7. Асимптотика при больших действительных x

2.7.1. Описание метода

Как уже было показано выше, функция (2.1) может быть записана в виде преобразования Ханкеля рациональной функции:

$$\omega_s^\nu(x) = \frac{1}{6\pi} G_{2,8}^{5,2}\left(\left(\frac{x}{6}\right)^6 \middle| \begin{array}{l} \frac{1}{3}-\frac{s}{6}, \frac{5}{6}-\frac{s}{6} \\ \frac{1}{3}-\frac{s}{6}, \frac{5}{6}-\frac{s}{6}, \frac{\nu}{6}, \frac{\nu}{6}+\frac{1}{3}, \frac{\nu}{6}+\frac{2}{3}, -\frac{\nu}{6}, -\frac{\nu}{6}+\frac{1}{3}, -\frac{\nu}{6}+\frac{2}{3} \end{array} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} H_\nu \left[\frac{y^{s-1/2}}{1+y^3}; x \right].$$

В [149, 150] (также в [65], и др.) описаны разные способы получения асимптотики преобразования Ханкеля. Мы воспользуемся методом, описанным в R.Wong в [149, 150]. В этих работах используется отличное от традиционного определение преобразования Ханкеля:

$$I(x) = \int_0^\infty q(y) J_\nu(xy) dy.$$

В терминах этого определения имеем:

$$q(y) = \frac{y^s}{1+y^3}.$$

Нам нужно удовлетворить условиям теорем 1 и 3 из [149], дающих асимптотические формулы преобразования Ханкеля с формулами для остаточного члена и оценки остаточного члена соответственно. Только вместо условий (Q_1) - (Q_3) из [149] мы используем условия (i) - (iii) из [150], следуя объяснениям данным там же. Именно:

(i) функция $q(y)$ m-раз непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$, где m - положительное целое;

(ii) при $y \to +0$,

$$q(y) \sim \sum_{p=0}^{\infty} q_p y^{p+\lambda-1}, \tag{2.51}$$

где $q_0 \neq 0, \mathrm{Re}\ (\nu+\lambda) > 0,\ m \geq \mathrm{Re}\ \lambda$ и разложение (2.51) m-раз дифференцируемо;
(iii) интегралы

$$\int\limits_1^{\infty} y^{-1/2} q(y) e^{ixy} dy,\ \ \int\limits_1^{\infty} y^{j-m-1/2} q^{(j)}(y) e^{ixy} dy,\ j = 1, \ldots, m$$

сходятся равномерно при всех достаточно больших x.

Оценка остатка асимптотического разложения из теоремы 3, [149] справедлива при выполнении условий (i), (ii) и (Q_3') вместо (iii):
(Q_3') для каждого $j = 0, 1, \ldots, m,\ q^{(m)}(y) = O(y^{-j-1})$ при $y \to \infty$. На самом деле, из (Q_3'), вместе с непрерывностью производных из (i), следует (iii).

Проверим выполнение этих условий:
(i) очевидно выполнено для любого $m \geq 0$;
(ii) функция $q(y)$ может быть разложена в ряд в единичном круге $|y| < 1$ по формуле

$$q(y) = \frac{y^s}{1+y^3} = y^s \sum_{n=0}^{\infty} \left(-y^3\right)^n, \tag{2.52}$$

откуда $\lambda = s+1,\ q_{3p} = (-1)^p,\ q_{3p+1} = q_{3p+2} = 0,\ p = 0, 1, \ldots$ Условие $\mathrm{Re}\ (\nu+\lambda) = \mathrm{Re}\ (\nu+s+1) > 0$ совпадает с левой частью условия сходимости интеграла (2.1) (неравенство (2.8)). По второй теореме Абеля разложение (2.52) бесконечное число раз дифференцируемо.
(Q_3') $q^{(j)}(y) = O(y^{s-3-j}) = O(y^{-j-1})$, т.е. $s \leq 2$.

Далее, следуя R. Wong, введем обозначения:

$$\phi_n(y) = q(y) - \sum_{i=0}^{n-1} q_i y^{s+i},\ y > 0,$$

$$\phi_{0,n}(y) = \phi_n(y)$$

и, для $j = 0, 1, \ldots, m-1$, обозначим

$$\phi_{j+1,n}(y) = \phi_{j,n}'(y) - (\nu+j+1)\phi_{j,n}(y) y^{-1}. \tag{2.53}$$

Тогда, по теореме 1 из [149], для любого положительного целого n, такого что

$$m - \mathrm{Re}\ \lambda < n < m + \frac{3}{2} - \mathrm{Re}\ \lambda,$$

справедливо представление:

$$\omega_s^{\nu}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+i+1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-i+1-s}{2}\right)} \frac{2^{i+s}}{x^{i+s+1}} + \delta_{m,n}(x), \tag{2.54}$$

где

$$\delta_{m,n}(x) = \left(\frac{-1}{x}\right)^m \int\limits_0^\infty J_{\nu+m}(xy)\phi_{m,n}(y)dy.$$

Подставляя значения q_i мы можем переписать (2.54) в виде:

$$\omega_s^\nu(x) \sim \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+3i+1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-3i+1-s}{2}\right)} \frac{2^{3i+s}}{x^{3i+s+1}},\ x \to \infty. \tag{2.55}$$

Отметим, что это асимптотическоое разложение может быть получено методом преобразования Меллина, описанным в [144], упомянутым также в [150] и, более подробно, в [58]. Для этого достаточно сместить траекторию интегрирования в интеграле (2.24) так, чтобы она охватывала не только полюса функций $\Gamma\left(\frac{2}{3} - \frac{s}{3} + \frac{u}{3}\right)$ и $\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{u}{2}\right)$, но и несколько полюсов $\Gamma\left(\frac{1}{3} + \frac{s}{3} - \frac{u}{3}\right)$, сумма вычетов подынтегральной функции $\frac{1}{6}\mathcal{H}$ в которых и дает разложение (2.55).

В теореме 3 из той же статьи [149] приведены оценки для $\delta_{m,n}(x)$: при $n = m - \mathrm{Re}\ \lambda + 1$

$$|\delta_{m,n}(x)| \le \frac{B_{\nu+m}}{x^{m+1/2}} \int\limits_0^\infty y^{-1/2}|\phi_{m,n}(y)|dy, \tag{2.56}$$

а при $m - \mathrm{Re}\ \lambda < n < m - \mathrm{Re}\ \lambda + 1$

$$|\delta_{m,n}(x)| \le \frac{A_{\nu+m}}{x^m} \int\limits_0^\infty |\phi_{m,n}(y)|dy,$$

где

$$A_\alpha = \sup_{0\le y<\infty} |J_\alpha(y)|,$$

$$B_\alpha = \sup_{0\le y<\infty} |y^{1/2}J_\alpha(y)|.$$

Поскольку $J_\nu(x)$ непрерывна на полуоси $[0;\infty)$ при $\mathrm{Re}\ \nu \ge 0$, соотношения (2.4) и (2.6) доказывают, что A_α и B_α конечны при $\mathrm{Re}\ \alpha \ge 0$ (см. также [149]).

2.7.2. Примеры.

Пусть сначала $n = 1$. Имеем:

$$\phi_{0,1}(y) = -\frac{y^{s+3}}{1+y^3},$$

и если $-1 < \mathrm{Re}\ s \le 0$, то $m = 1$:

$$\phi_{1,1}(y) = y^{s+2}\frac{y^3(\nu - s + 1) + \nu - s - 2}{(1 + y^3)^2}.$$

Например, если $s = 0$

$$|\delta_{1,1}| \le \frac{B_{\nu+1}}{x^{3/2}}\int\limits_0^\infty y^{-1/2}\left|\frac{y^5(\nu+1)}{(1+y^3)^2} + \frac{y^2(\nu-2)}{(1+y^3)^2}\right| dy \le$$

$$\le (5|\nu+1| + |\nu-2|)\frac{\pi}{9}B_{\nu+1}x^{-3/2} = C_1 x^{-3/2},$$

где $C_1 = (5|\nu+1| + |\nu-2|)\dfrac{\pi}{9}B_{\nu+1}$. Тогда

$$\left|\omega_0^\nu - \frac{1}{x}\right| \le (5|\nu+1| + |\nu-2|)\frac{\pi}{9}B_{\nu+1}x^{-3/2}. \tag{2.57}$$

Эта оценка позволяет, в частности, локализовать нули функции ω_0^ν:

$$\left(\frac{1}{x} - \mathrm{Re}\ \omega_0^\nu\right)^2 + (\mathrm{Im}\ \omega_0^\nu)^2 \le \frac{(C_1)^2}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^{-1}\mathrm{Re}\ \omega_0^\nu \ge x^{-2} - (C_1)^2 x^{-3} + |\omega_0^\nu|^2.$$

Таким образом, при $x > (C_1)^2$, $\mathrm{Re}\ \omega_0^\nu > 0$ и ω_0^ν не имеет нулей на этом интервале. Оценка (2.57) может быть переписана в терминах G-функции Мейера:

$$\left|G^{5,2}_{2,8}\left(\left(\frac{x}{6}\right)^6 \middle| \begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{\nu}{6}, \frac{\nu}{6}+\frac{1}{3}, \frac{\nu}{6}+\frac{2}{3}, -\frac{\nu}{6}, -\frac{\nu}{6}+\frac{1}{3}, -\frac{\nu}{6}+\frac{2}{3}\end{matrix}\right) - \frac{6\pi}{x}\right| \le$$

$$\le (5|\nu+1| + |\nu-2|)\frac{2\pi^2}{3}B_{\nu+1}x^{-3/2}.$$

Вспомним, что $q_1 = q_2 = 0$, тогда, из (2.53), $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$. Простые, но громоздкие вычисления приводят к формуле для $\phi_{2,2}$:

$$\phi_{2,2} = -y^{s+1}\left[y^6(-\nu^2 - s^2 + 2s\nu - 4\nu + 4s - 3) + \right.$$

$$\left. + y^3(-2\nu^2 - 2s^2 + 4s\nu - 2\nu + 2s - 15) - \nu^2 - s^2 + 2s\nu + 2\nu - 2s\right] / \left[(1+y^3)^3\right].$$

Мы не будем приводить здесь общую (произвольные ν и s) формулу для $\phi_{3,3}$. Она может быть легко получена по рекуррентному определению (2.53). Пусть опять $s = 0$, следуя тому же алгоритму, что выше, можно также получить оценки $\left|\omega_0^\nu - \frac{1}{x}\right|$ при $n = 2, 3$ в виде

$$\left|\omega_0^\nu - \frac{1}{x}\right| \le C_2 x^{-5/2}$$

и

$$\left|\omega_0^\nu - \frac{1}{x}\right| \leq C_3 x^{-7/2},$$

где C_2 и C_3 - некоторые параметры, зависящие от ν. Из этих оценок следует, что при $x > (C_2)^{2/3}$ или $x > (C_3)^{2/5}$, $\mathrm{Re}\,\omega_0^\nu > 0$, и $\omega_0^\nu \neq 0$.

Пусть, например, $\nu = 0$. Тогда $\Gamma\left(\frac{1-i}{2}\right)$ из знаменателя (2.54) имеет полюса при нечетных значениях i. Тогда в асимптотическом разложении ω_0^0 только члены с номерами $i = 0, 6, \ldots, 6j, \ldots$ не равны нулю. Следовательно

$$\omega_0^0(x) = \frac{1}{x} + \delta_{1,1} = \frac{1}{x} + \delta_{2,2} = \ldots = \frac{1}{x} + \delta_{6,6}.$$

Из (2.56)

$$|\delta_{1,1}| \leq \frac{7}{9}\pi B_1 x^{-3/2}, \;\; |\delta_{2,2}| \leq \pi B_2 x^{-5/2},$$

и, не приводя точного значения константы,

$$\omega_0^0(x) - \frac{1}{x} = O(B_6 x^{-13/2}), x \to \infty.$$

Рассмотрим теперь некоторые ненулевые целые значения s: $s = 1, 2, \ldots$ Опять $n = m - s$. Ограничившись одним членом асимптотического разложения, имеем: $n = 1,\; m = s + n = s + 1$. Пусть, например, $s = 1,\; \nu = 0$. Тогда $\Gamma\left(-\frac{i}{2}\right)$ из знаменателя (2.54) имеет полюса при четных значениях i. Первый ненулевой член асимптотического разложения имеет номер $i = 3$. Таким образом

$$\omega_1^0 = \delta_{2,1} = \delta_{3,2} = \delta_{4,3}.$$

Справедливы, в частности, следующие оценки:

$$|\omega_1^0| = |\delta_{2,1}| \leq \frac{8}{9}\pi B_2 x^{-5/2},$$

$$|\omega_1^0 + 9x^{-5}| = |\delta_{5,4}| \leq \frac{1119055}{7776}\pi B_5 x^{-11/2}.$$

2.8. Численные результаты

Автором был проведен ряд численных экспериментов по вычислению функции $\omega_s^\nu(x)$ при различных частных значениях параметров ν и s. Прежде всего возможно вычисление интеграла (2.1) по приближенным формулам численного интегрирования. Была использована весьма продвинутая процедура из библиотеки NAG для вычисления несобственных интегралов от осциллирующих функций. На рисунке 1 приведены несколько графиков - результатов использования этой процедуры для $\nu = 2,\; 0 \leq s \leq 5/2$, из которых видно, что методы численного интегрирования дают приемлемый результат лишь для значений s достаточно далеких от границы абсолютной сходимости интеграла. На рисунках со 2-го по 6-ой приведены графики функции для различных характерных пар значений ν и s, иллюстрирующие различные варианты поведения функции $\omega_s^\nu(x)$ - поведение в нуле, наличие, количество и расположение нулей, поведение при $x \gg 1$. При этом на каждом из этих рисунков приведены графики, полученные методом численного интегрирования, суммированием нескольких (при выбранных значениях аргумента $x \leq 15$ достаточно просуммировать всего 5-10 членов ряда, для получения хорошей точности при больших значениях аргумента, нужно сохранять больше знаков мантиссы числа, что, однако, увеличивает время вычислений) членов ряда и по асимптотической формуле (здесь достаточно просуммировать 1-3 члена разложения). Из графиков видно, что области применимости ряда и асимптотического разложения пересекаются и результаты хорошо согласуются в этой общей области. Это позволяет быстро и с очень хорошей точностью вычислять функцию $\omega_s^\nu(x)$ на всем интервале $0 \leq x < \infty$, а также ее аналитическое продолжение в области значений параметров и аргумента, в которых интеграл (2.1) расходится.

Глава 3

Операторы преобразования

В этой главе мы изучим различные классы интегральных операторов преобразования со специальными функциями в ядрах. Мы построим новые операторы этих классов, изучим их групповые свойства и получим формулы их композиций.

Мы рассмотрим также некоторые приложения к функциям Бесселя и к гипергеометрическим функциям двух переменных.

3.1. Введение

Определение 3.1. *Пусть дана пара операторов (A, B). Оператор T называется оператором преобразования (ОП), если выполняется соотношение*

$$TA = BT. \tag{3.1}$$

Соотношение (3.1) называется иначе сплетающим свойством, тогда говорят, что ОП T сплетает операторы A и B.

Для превращения (3.1) в строгое определение необходимо задать пространства или множества функций, на которых действуют данные операторы A, B и, следовательно, оператор T. Иногда в определение ОП закладывают и требование обратимости, что, однако, не является ни обязательным, ни общепринятым.

Теория операторов преобразования нашла широкое применение в теории спектральных операторов, теории псевдодифференциальных операторов, теории рассеяния, при изучении обратных задач для операторов Штурма-Лиувилля и Дирака, при изучении уравнений с частными производными в комплексной области и др.

В первом разделе этой главы изучается специальный класс ОП типа Векуа-Эрдейи-Лаундеса (ВЭЛ).

Определение 3.2. *Абстрактным ОП ВЭЛ называется сплетающий оператор для пары $(A+\lambda_1, A+\lambda_2)$, где A - некоторый оператор, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ - комплексные числа. Иными словами*

$$T(A+\lambda_1) = (A+\lambda_2)T. \tag{3.2}$$

В этом параграфе мы будем обозначать $T = T(\lambda_1, \lambda_2)$. Как правило, T - линейный оператор. В этом случае из (3.2) следует, что

$$TA = (A + (\lambda_2 - \lambda_1))T,$$

$$T(A + (\lambda_1 - \lambda_2)) = AT.$$

Поэтому, если обозначить через $L_A(\lambda_1, \lambda_2)$ класс линейных операторов ВЭЛ, удовлетворяющих (3.2), то получим

Утверждение 3.1. *Следующие четыре условия эквивалентны:*

$$а)\ T \in L_A(\lambda_1, \lambda_2),\ \ б)\ T \in L_A(0, \lambda_2 - \lambda_1),$$

$$в)\ T \in L_A(\lambda_1 - \lambda_2, 0),\ \ г)\ T \in L_A(-\lambda_2, -\lambda_1).$$

Одно из применений ОП - это исследование уравнений. Рассмотрим оператороное уравнение $Au = f$. Предположим, что мы обладаем большей информацией о решении более простого ("модельного" или "невозмущенного") уравнения с другим оператором B и знаем ОП T для пары (A, B). Тогда, применяя T к уравнению, получим $Bv = g$, где $v = Tu$, $g = Tf$. Решение первоначального уравнения восстанавливается по формуле $u = T^{-1}v$, причем

$$\|u\| \le \|T^{-1}\| \|v\|$$

если T^{-1} ограниченный оператор. Это объясняет важность формул для прямого и обратного ОП, условий их ограниченности и оценок норм. В этом контексте ОП ВЭЛ являются операторами "сдвига" на решениях дифференциальных уравнений по спектральному параметру.

ОП являются языком, на котором удобно излагать теорию спецфункций и интегральных операторов со спецфункциями в ядрах [77], [78]. ОП и были впервые введены Сониным и Пуассоном в виде интегральных представлений функций Бесселя через тригонометрические и наоборот.

Операторы ВЭЛ были введены и изучены в работах И.Н. Векуа [8], [9], [10], А. Эрдейи [92], [94], [96] и Дж.С. Лаундеса [117]-[119]. Они использовались также в [24], [50], [51], [53], [71], [161].

В работах Векуа, Эрдейи и Лаундеса рассматриваются следующие базовые дифференциальные операторы:

$$A = D^2 = \frac{d^2}{dx^2},\ A = B_\nu = D^2 + \frac{2\nu+1}{x}D,\ A = x^2 B_\nu.$$

Мы продолжаем рассмотрение тех же операторов. План главы следующий. Так как различные классы ОП ВЭЛ рассеяны в журнальной и монографической литературе, мы приводим известные формулы для них с классификацией по типу интегральных операторов. Для основных ОП ВЭЛ доказываем полугрупповое свойство. Затем, используя метод факторизации из [24], мы построим новые классы ОП ВЭЛ, ядра которых выражаются через гипергеометрические функции от двух переменных. В теореме 3.2 устанавливается соответствие между ОП ВЭЛ и одним классом ОП, при этом обобщается результат из [25]. В последнем разделе главы мы рассмотрим операторы Бушмана-Эрдейи, построим их композиции в виде интегральных операторов, ядра которых выражаются через G-функцию Мейера.

В работе используются обычные обозначения для функций Бесселя $J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$. Функции Бесселя-Клиффорда [50], выражаются через функции Бесселя следующим образом:

$$\bar{J}_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)2^\nu}{z^\nu} J_\nu(z),$$

$$\bar{I}_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)2^\nu}{z^\nu} I_\nu(z).$$

Более распространенными являются названия “нормированная” или “малая” функции Бесселя и Макдональда с обозначениями

$$j_\nu(z) = \bar{J}_\nu(z),\ i_\nu(z) = \bar{I}_\nu(z).$$

Для функций двух переменных с любым числом параметров мы используем, следуя [145] и [142], следующее обозначение для ряда Кампе-де-Ферье:

$$F^{p,q,r}_{s,t,u}\left(\begin{array}{c|c|c|c} \alpha_1,\dots,\alpha_p & \beta_1,\dots,\beta_q & \gamma_1,\dots,\gamma_r & x \\ a_1,\dots,a_s & b_1,\dots,b_t & c_1,\dots,c_u & y \end{array}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(\alpha)_{k+n}}{(a)_{k+n}} \frac{(\beta)_k}{(b)_k} \frac{(\gamma)_n}{(c)_n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^n}{n!}, \tag{3.3}$$

где $(a)_k$ - символ Похгаммера, введенный в главе 1; символ Похгаммера векторного аргумента $d = (d_1, \dots, d_n)$ определяется по формуле

$$(d)_i = (d_1)_i \cdot \ldots \cdot (d_n)_i.$$

В частности

$$\Xi_2(\beta_1, \beta_2; a; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta_1)_k(\beta_2)_k}{(a)_{k+n}} \frac{x^k}{k!}\frac{y^n}{n!} =$$

$$= F^{0,2,0}_{1,0,0}\left(\begin{array}{c|c||c} & \beta_1, \beta_2 & x \\ a & & y \end{array}\right),$$

$${}_2F_1(a, b; c; z) = F^{0,2,0}_{0,1,0}\left(\begin{array}{|c||c} a, b & z \\ c & 0 \end{array}\right),$$

$${}_pF_q((a_p); (b_q); z) = F^{0,p,0}_{0,q,0}\left(\begin{array}{|c||c} a_1, \ldots, a_p & z \\ b_1, \ldots, b_q & 0 \end{array}\right),$$

$$\bar{J}_\nu(z) = F^{0,0,0}_{0,1,0}\left(\begin{array}{|c||l} & -z^2/4 \\ \nu+1 & 0 \end{array}\right),$$

$$R_1(\alpha, \beta, \beta', \delta; \gamma, \delta'; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+n}(\beta)_k(\beta')_n(\delta)_k}{(\gamma)_{k+n}(\delta')_k} \frac{x^k}{k!}\frac{y^n}{n!} =$$

$$= F^{1,2,1}_{1,1,0}\left(\begin{array}{c|c|c|c} \alpha & \beta, \delta & \beta' & x \\ \gamma & \delta' & & y \end{array}\right).$$

Здесь Ξ_2 - вырожденная гипергеометрическая функция Гумберта, R_1 - функция, введенная и изученная в [11].

3.2. Интегральные операторы и ОП ВЭЛ

Определим функциональные пространства

$$S_{0+} = \{f(x) \in C^\infty(0, \infty) | \lim_{x\to 0} x^{-k} f(x) = 0\},$$

$$S_{-} = \{f(x) \in C^\infty(0, \infty) | \lim_{x\to \infty} x^{k} f(x) = 0\}$$

для всех чисел $k \geq 0$. Там, где это не оговорено особо, операторы типа $\int\limits_0^x K(x,t)f(t)dt$ рассматриваются на пространстве S_{0+}, а операторы типа $\int\limits_x^\infty K(x,t)f(t)dt$ - на S_-. Мы будем использовать эти пространства в формулировках теорем, даже если эти теоремы легко могут быть доказаны для более широких классов функций. Мы также будем подразумевать, что всюду в таких операторах $x > 0$.

Мы используем обозначения для интегральных операторов из энциклопедической монографии [50].

Введем интегральные операторы по формулам:

1) операторы дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{a}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \ x > a, \ \alpha > 0, \tag{3.4}$$

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{x}^{b} \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \ x < b, \ \alpha > 0. \tag{3.5}$$

Модификациями этих операторов являются

2) операторы Эрдейи-Кобера

$$I_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha} f(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{a}^{x} \frac{t^{\sigma\eta+\sigma-1} f(t)}{(x^{\sigma}-t^{\sigma})^{1-\alpha}} dt, \ x > a, \ \alpha > 0, \tag{3.6}$$

$$I_{b-;\sigma,\eta}^{\alpha} f(x) = \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{x}^{b} \frac{t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t)}{(t^{\sigma}-x^{\sigma})^{1-\alpha}} dt, \ x < b, \ \alpha > 0, \tag{3.7}$$

σ - произвольное действительное число.

3) Следующие интегральные операторы относятся к типу ОП ВЭЛ или связаны с ними (см. [50]):

$$C_{a+}^{\alpha,\lambda} f(x) \equiv C_{a+}(\alpha,\lambda) f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} j_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x-t}\right) f(t) dt =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1-\alpha} \int\limits_{a}^{x} (x-t)^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x-t}\right) f(t) dt,$$

$$C_{0+}(\alpha,\lambda) f(x) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1-\alpha} \int\limits_{0}^{x} (x-t)^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x-t}\right) f(t) dt,$$

$$C_{b-}(\alpha,\lambda) f(x) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1-\alpha} \int\limits_{x}^{b} (t-x)^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t-x}\right) f(t) dt,$$

$$C_{-}(\alpha,\lambda) f(x) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1-\alpha} \int\limits_{x}^{\infty} (t-x)^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t-x}\right) f(t) dt,$$

$$E_{a+}(\alpha,\lambda,\gamma) f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} j_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{(x-t)(x-t+\gamma)}\right) f(t) dt, \tag{3.8}$$

$$E_{b-}(\alpha,\lambda,\gamma) f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{x}^{b} (t-x)^{\alpha-1} j_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{(t-x)(t-x+\gamma)}\right) f(t) dt. \tag{3.9}$$

Во всех этих формулах $\mathrm{Re}\ \alpha > 0, \ \lambda \in \mathbf{C}, \ |\arg\ \gamma| < \pi, \ j_{\nu}$ - нормированная функция Бесселя.

При частном значении параметра $\lambda = 0$ введенные операторы сводятся к рассмотренным ранее операторам Римана-Лиувилля:

$$C_{a+}(\alpha, 0) = E_{a+}(\alpha, 0, \gamma) = I_{a+}^{\alpha}.$$

Операторы E_{a+}, E_{b-} являются несверточными, но их свойства аналогичны свойствам операторов C, к которым они сводятся при $\gamma = 0$.

К числу известных свойств этих операторов ВЭЛ относятся формулы композиций, следующие из экспоненциальных представлений операторов:

$$C_{a+}(\alpha, \lambda) = I_{a+}^{\alpha} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4} I_{a+}^{1}\right),$$

$$C_{a+}(\alpha, \lambda) C_{a+}(\gamma, \delta) = C_{a+}\left(\alpha + \gamma, \sqrt{\lambda^2 + \delta^2}\right),$$

$$C_{a+}(\alpha, \lambda) C_{a+}(\gamma, i\lambda) = I_{a+}^{\alpha+\gamma},$$

$$C_{a+}(\alpha, \lambda) I_{a+}^{\beta} = C_{a+}(\alpha + \beta, \lambda),$$

аналогичные формулы справедливы для C_{b-} [50].

Известно также, что в образах преобразования Лапласа эти операторы преобразования ВЭЛ сводятся к умножению на мультипликаторы:

$$L(Af) = m(A) L(f),$$

$$m\left(C_{0+}(\alpha, \lambda)\right)(p) = p^{-\alpha} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4p}\right), \ \operatorname{Re} p > 0.$$

Это делает прозрачными приведенные выше формулы композиций.

Упомянем следующие несверточные операторы, также связанные с ОП ВЭЛ:

$$P_{0+}(\alpha, \lambda) f(x) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1-\alpha} \int_0^x t^{\frac{1-\alpha}{2}} (x-t)^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}\left(\lambda \sqrt{t(x-t)}\right) f(t)\, dt, \quad (3.10)$$

$$Q_{0+}(\alpha, \lambda) f(x) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1-\alpha} x^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_0^x (x-t)^{\frac{\alpha-1}{2}} I_{\alpha-1}\left(\lambda \sqrt{x(x-t)}\right) f(t)\, dt, \quad (3.11)$$

$$R_{0+}(\alpha, \lambda) f(x) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1-\alpha} \int_0^x t^{\frac{1-\alpha}{2}} (x-t)^{\frac{\alpha-1}{2}} I_{\alpha-1}\left(\lambda \sqrt{t(x-t)}\right) f(t)\, dt, \quad (3.12)$$

$$S_{0+}(\alpha, \lambda) f(x) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1-\alpha} x^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_0^x (x-t)^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}\left(\lambda \sqrt{x(x-t)}\right) f(t)\, dt. \quad (3.13)$$

Еще одной парой операторов ВЭЛ являются обобщенные операторы Эрдейи-Кобера:

$$J_{\lambda}(\eta, \alpha) f(x) = 2^{\alpha} \lambda^{1-\alpha} x^{-2\alpha-2\eta} \int_0^x t^{2\eta+1} (x^2 - t^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}\left(\lambda \sqrt{x^2 - t^2}\right) f(t)\, dt, \quad (3.14)$$

$$R_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=2^\alpha\lambda^{1-\alpha}x^{2\eta}\int\limits_x^\infty t^{1-2\alpha-2\eta}(t^2-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}J_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)f(t)dt, \tag{3.15}$$

где $\operatorname{Re}\alpha>0,\ \eta>-1/2$. Случай $\alpha=0$ должен быть рассмотрен особо.
4) Особо для операторов (3.14) и (3.15) рассмотрим случай $\alpha=0$ и $\eta=0$, введя операторы Вольтерра II рода на дифференцируемых функциях

$$_1J_\lambda f(x)\equiv J_\lambda f(x)=f(x)-\lambda\int\limits_0^x t\frac{J_1\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}}f(t)dt= \tag{3.16}$$

$$=f(x)-\frac{\lambda^2}{2}\int\limits_0^x t\ {}_0F_1\left(2;-\frac{\lambda^2\left(x^2-t^2\right)}{4}\right)f(t)dt=$$

$$=\int\limits_0^x J_0\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)Df(t)dt,\ f(0)=0, \tag{3.17}$$

$$_1R_\lambda f(x)\equiv R_\lambda f(x)=f(x)-\lambda\int\limits_x^\infty t\frac{J_1\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}}f(t)dt= \tag{3.18}$$

$$=f(x)-\frac{\lambda^2}{2}\int\limits_x^\infty t\ {}_0F_1\left(2;-\frac{\lambda^2\left(t^2-x^2\right)}{4}\right)f(t)dt=$$

$$=-\int\limits_x^\infty J_0\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)Df(t)dt,\ 0<a<x,\ t^{-\frac12}f(t)\in L_1(a,\infty),\operatorname{Im}\lambda=0, \tag{3.19}$$

где $D=\dfrac{d}{dx}$.

Введем операторы замены переменной по формулам:

$$Af(x)=f(x^2),\ Bf(x)=\overline{A}f(x)=\frac12 x^{-\frac12}f(\sqrt{x}),\ Hf(x)=A^{-1}f(x)=f(\sqrt{x}).$$

Тогда справедливы следуюшие формулы, устанавливающие связи между операторами $J_\lambda,\ R_\lambda$ и $C_{0+},\ C_-$.

Утверждение 3.2. $J_\lambda=AC_{0+}(1,\lambda)BD.$

Доказательство.

$$C_{0+}(1,\lambda)Bg=\int\limits_0^x J_0\left(\lambda\sqrt{x-t}\right)(Bg)(t)dt=$$

$$=\int\limits_0^x J_0\left(\lambda\sqrt{x-t}\right)\frac12 t^{-1/2}g\left(\sqrt{t}\right)dt=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{t}=y\\ t=y^2,\quad dt=2ydy\end{array}\right\}=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{x}} J_0\left(\lambda\sqrt{x-y^2}\right)\frac{1}{2y}g(y)2ydy,$$

$$AC_{0+}(1,\lambda)BDf = \int_0^x J_0\left(\lambda\sqrt{x^2-y^2}\right) Df(y)dy.$$

Утверждение 3.3. *$J_\lambda = I + AC_{0+}(0,\lambda)H = A(I + C_{0+}(0,\lambda))H$, где I - единичный оператор.*

Доказательство.

$$AC_{0+}(0,\lambda)Hf =$$

$$= A\frac{\lambda}{2}\int_0^x (x-t)^{-1/2}J_{-1}\left(\lambda\sqrt{x-t}\right) f\left(\sqrt{t}\right) dt = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{t} = y \\ t = y^2, \quad dt = 2ydy \end{array}\right\} =$$

$$= A\frac{\lambda}{2}\int_0^{\sqrt{x}} \left(x-y^2\right)^{-1/2} J_1\left(\lambda\sqrt{x-y^2}\right)(-1)f(y)2ydy =$$

$$= -\lambda\int_0^x y\frac{J_1\left(\lambda\sqrt{x^2-y^2}\right)}{\sqrt{x^2-y^2}}f(y)dy.$$

Аналогично оператор R_λ выражается через C_-.

Используя операции сопряжения и обращения, мы получим из операторов J_λ и R_λ еще шесть операторов того же типа:

$$_2J_\lambda f = {}_1\overline{J}_\lambda f = f(x) - \overline{\lambda}x\int_x^\infty \frac{J_1(\overline{\lambda}\sqrt{t^2-x^2})}{\sqrt{t^2-x^2}}f(t)dt = x\ {}_1R_{\overline{\lambda}}\ \frac{1}{x}f, \qquad (3.20)$$

$$_2R_\lambda f = {}_1\overline{R}_\lambda f = f(x) - \overline{\lambda}x\int_0^x \frac{J_1\left(\overline{\lambda}\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}}f(t)dt = x\ {}_1J_{\overline{\lambda}}\ \frac{1}{x}f, \qquad (3.21)$$

$$_3J_\lambda f = \left({}_1J_\lambda\right)^{-1} f = f(x) + \lambda\int_0^x t\frac{I_1\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}}f(t)dt = {}_1J_{i\lambda}f, \qquad (3.22)$$

$$_3R_\lambda f = \left({}_1R_\lambda\right)^{-1} f = f(x) + \lambda\int_x^\infty t\frac{I_1\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}}f(t)dt = {}_1R_{i\lambda}f, \qquad (3.23)$$

$$_4J_\lambda f = ({}_1\overline{J}_\lambda)^{-1}f = f(x) - \overline{\lambda}x\int_x^\infty \frac{I_1(-\overline{\lambda}\sqrt{t^2-x^2})}{\sqrt{t^2-x^2}}f(t)dt =$$

$$= x\ {}_3R_{-\bar{\lambda}}\ \frac{1}{x}f = {}_1\overline{J}_{i\lambda}f = x\ {}_1R_{-i\overline{\lambda}}\ \frac{1}{x}f, \qquad (3.24)$$

$$_4R_\lambda f = ({}_1\overline{R}_\lambda)^{-1}f = f(x) - \overline{\lambda}x\int_0^x \frac{I_1\left(-\overline{\lambda}\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}}f(t)dt =$$

$$= x\ {}_3J_{-\bar{\lambda}}\ \frac{1}{x}f = {}_1\overline{R}_{i\lambda}f = x\ {}_1J_{-i\overline{\lambda}}\ \frac{1}{x}f. \qquad (3.25)$$

Для получения формул связи операторов ${}_iJ_\lambda,\ {}_iR_\lambda,\ i=2,3,4$ с операторами $C_{0+},\ C_-$ достаточно воспользоваться одним из равенств, приведенных выше. Например

$$ {}_2J_\lambda f = x\ {}_1R_{\overline{\lambda}}\,\frac{1}{x}f = D\overline{AC_{0+}^{1,\lambda}}Bf = xAC_-^{1,\bar\lambda}BD\frac{1}{x}f, $$

$$ {}_3J_\lambda f = {}_1J_{i\lambda}f = I_{0+}^1 B^{-1}\left(C_{0+}^{1,\lambda}\right)^{-1}A^{-1}f = AC_{0+}^{1,i\lambda}BDf. $$

Отсюда, в частности, можно вывести формулы обращения и сопряжения операторов $C_{0+},\ C_-$.

5) Введенные операторы (3.16), (3.18), (3.20)-(3.25) образуются, при выполнении дополнительных ограничений на функцию, с использованием дифференцирования из "первичных" операторов

$$ {}_5J_\lambda f = \int\limits_0^x J_0\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)f(t)dt, $$

$$ {}_5R_\lambda f = -\int\limits_x^\infty J_0\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)f(t)dt, $$

$$ {}_6J_\lambda f = -\int\limits_x^\infty J_0\left(\bar\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)f(t)dt = {}_5R_{\bar\lambda}f, $$

$$ {}_6R_\lambda f = \int\limits_0^x J_0\left(\bar\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)f(t)dt = {}_5J_{\bar\lambda}f, $$

$$ {}_7J_\lambda f = \int\limits_0^x I_0\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)f(t)dt = {}_5J_{i\lambda}f, $$

$$ {}_7R_\lambda f = -\int\limits_x^\infty I_0\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)f(t)dt = {}_5R_{i\lambda}f, $$

$$ {}_8J_\lambda f = -\int\limits_x^\infty I_0\left(-\bar\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)f(t)dt = {}_7R_{-\bar\lambda}f, $$

$$ {}_8R_\lambda f = \int\limits_0^x I_0\left(-\bar\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)f(t)dt = {}_7J_{-\bar\lambda}f, $$

так что

$$ {}_1R_\lambda = {}_5R_\lambda D,\ {}_1J_\lambda = {}_5J_\lambda D,\ {}_3R_\lambda = {}_7R_\lambda D,\ {}_3J_\lambda = {}_7J_\lambda D, $$

$$ {}_2R_\lambda = D_6R_\lambda,\ {}_2J_\lambda = D_6J_\lambda,\ {}_4R_\lambda = D_8R_\lambda,\ {}_4J_\lambda = D_8J_\lambda. $$

Важность введенных здесь двух серий операторов в том, что они содержат по существу все известные ОП для пары $(D^2, D^2+\mu)$. Одна из целей этой главы - построение на базе этих ОП новых ОП с различными свойствами.

Еще два класса ОП ВЭЛ, упомянутые нами ранее - несверточные ОП ВЭЛ (3.8)-(3.9) и обобщенные операторы Эрдейи-Кобера (3.14)-(3.15) в этой работе подробно не рассматриваются. Отметим, что действие введенных операторов в весовых пространствах $L_p(0,\infty)$ изучалось в [104].

3.3. Операторы типа ВЭЛ как ОП

Приведем простой общий результат, позволяющий проверять интегральные операторы на сплетающее свойство для пары $(B_\nu, B_\mu+\omega)$.

Рассмотрим интегральный оператор Вольтерра второго рода

$$Jf(x)=\alpha f(x)+\int\limits_a^x K(x,t)f(t)dt, \tag{3.26}$$

где $a\geq 0$ или $a=\infty$.

Теорема 3.1. *Интегральный опратор (3.26), в котором ядро $K(x,t)$ имеет непрерывные вторые частные производные по каждой переменной, является на подходящих функциях $f\in C^2$ ОП типа ВЭЛ с оператором $A=B_\nu=D^2+\dfrac{2\nu+1}{x}D$, т.е. осуществляет преобразование*

$$JB_\nu f=(B_\mu+\omega)Jf,$$

если выполнены следующие условия:

$$1)\ \omega\alpha+\frac{2(\mu-\nu)}{x}K(x,x)+2\frac{d}{dx}K(x,x)=0,$$

$$2)\ \alpha(\mu-\nu)=0,$$

$$3)\ \left(\omega-\frac{2\nu+1}{t^2}\right)K(x,t)+\frac{2\mu+1}{x}\frac{\partial}{\partial x}K(x,t)+\frac{2\nu+1}{t}\frac{\partial}{\partial t}K(x,t)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}K(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}K(x,t)=0,$$

$$4)\ \frac{2\nu+1}{a}K(x,a)f(a)-\frac{\partial}{\partial t}K(x,a)f(a)+K(x,a)Df(a)=0,$$

где последнее условие при $a=0$ или $a=\infty$, как и в других “несобственных” случаях, понимается в смысле предела:

$$4')\ \frac{2\nu+1}{t}K(x,t)f(t)-\frac{\partial}{\partial t}K(x,t)f(t)+K(x,t)Df(t)\to 0,\ t\to a.$$

Доказательство. Нам нужно вывести условия, при которых

$$(B_\mu+\omega)Jf-JB_\nu f=0.$$

Первый член выражения равен

$$\begin{aligned}(B_\mu+\omega)Jf(x) &= D^2\int\limits_a^x K(x,t)f(t)dt+\frac{2\mu+1}{x}D\int\limits_a^x K(x,t)f(t)dt+\\ &+ \omega\int\limits_a^x K(x,t)f(t)dt+\alpha(B_\mu+\omega)f(x)=\\ &= \int\limits_a^x \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2}f(t)dt+\frac{2\mu+1}{x}\int\limits_a^x\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}f(t)dt+\omega\int\limits_a^x K(x,t)f(t)dt+\\ &+ 2\left[\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}f(t)\right]\Big|_{t=x}+\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=x}f(x)+\\ &+ K(x,x)f'(x)+K(x,x)\frac{1}{x}f(x)(2\mu+1)+\alpha(B_\mu+\omega)f(x).\end{aligned}$$

Второй член выражения равен

$$\begin{aligned}JB_\nu f(x) &= \alpha B_\nu f(x)+\int\limits_a^x K(x,t)\left(B_\nu f\right)(t)dt=\\ &= \alpha B_\nu f(x)+\left.K(x,t)f'(t)\right|_a^x+(2\nu+1)\frac{1}{t}\left.K(x,t)f(t)\right|_a^x-\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\left.f(t)\right|_a^x+\\ &+ \int\limits_a^x\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2}f(t)dt-(2\nu+1)\int\limits_a^x\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\frac{1}{t}f(t)dt+(2\nu+1)\int\limits_a^x K(x,t)\frac{1}{t^2}f(t)dt.\end{aligned}$$

Тогда при $0<a<\infty$ имеем

$$\begin{gathered}(B_\mu+\omega)Jf-JB_\nu f=\\ =\left(\omega\alpha+\frac{2(\mu-\nu)}{x}K(x,x)+2\frac{d}{dx}K(x,x)\right)f(x)+\\ +2\alpha\frac{\mu-\nu}{x}f'(x)+\\ +\int\limits_a^x\left\{\left(\omega-\frac{2\nu+1}{t^2}\right)K(x,t)+\frac{2\mu+1}{x}\frac{\partial}{\partial x}K(x,t)+\frac{2\nu+1}{t}\frac{\partial}{\partial t}K(x,t)+\right.\\ \left.+\frac{\partial^2}{\partial x^2}K(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}K(x,t)\right\}f(t)dt+ \qquad (3.27)\\ +\frac{2\nu+1}{a}K(x,a)f(a)-\frac{\partial}{\partial t}K(x,t)|_{t=a}f(a)+K(x,a)f'(a)=0.\end{gathered}$$

Приравнивая к нулю каждое из четырех слагаемых получаем условия теоремы. Нетрудно видеть, что при $a=0$ или $a=\infty$ приведенные выкладки приводят к условию 4'. Одновременно отметим, что “подходящими” являются функции, для которых, в частности, существуют интегралы

$$\int\limits_a^x K(x,t)\ f(t)\ dt,\quad \int\limits_a^x K(x,t)\ f''(t)\ dt,\quad \int\limits_a^x \frac{1}{t}K(x,t)\ f'(t)\ dt, \qquad (3.28)$$

и следующие два интеграла допускают дифференцирование под знаком интеграла:

$$D\int_a^x K(x,t)\ f(t)\ dt,\ \ D^2\int_a^x K(x,t)\ f(t)\ dt. \tag{3.29}$$

Теперь, для примера, проверим выполнение условий 1-4 для пары операторов ${}_1J_\lambda$ и ${}_1R_\lambda$.

Следствие 3.1. *Пусть* $f\in S_{0+}$. *Тогда*

$${}_1J_\lambda\ B_\nu f(x)=(B_\nu+\lambda^2){}_1J_\lambda f(x),\ \ x>0.$$

Доказательство. В обозначениях (3.26) $\alpha=1,\ a=0,$

$$K(x,t)=-\lambda t\frac{J_1\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}}=-\frac{\lambda^2 t}{2}{}_0F_1\left(2;-\frac{\lambda^2(x^2-t^2)}{4}\right),$$

причем последнее представление ядра делает очевидной непрерывность ядра и ядра, деленного на t, по переменной t на отрезке $[0,x]$ и существование всех частных производных. Отсюда следует, что условие $f\in S_{0+}$ является достаточным для существования интегралов (3.28) и допустимости дифференцирования в выражениях (3.29) (на самом деле достаточно было потребовать $f\in C^2[0,\infty)$).

Условие 2 дает $\nu=\mu$.

Условие 1: $\omega=-2\dfrac{d}{dx}K(x,x)=\lambda^2$.

Условие 3: $\left(\lambda^2-\dfrac{2\nu+1}{t^2}\right)K(x,t)+\dfrac{2\nu+1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}K(x,t)+$

$$+\frac{2\nu+1}{t}\frac{\partial}{\partial t}K(x,t)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}K(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}K(x,t)=$$

$$=-\frac{\lambda^3 t}{\sqrt{x^2-t^2}}\left(J_1\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)-4\frac{J_2\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\lambda\sqrt{x^2-t^2}}+\right.$$

$$\left.+\ J_3\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\right)\equiv 0.$$

При выводе последнего тождества использована формула связи смежных функций Бесселя (2.10).

Условие 4: $2\nu\lambda\dfrac{J_1(x)}{x}f(0)=0$.

Следствие 3.2. *Пусть* $Im\ \lambda=0,\ \ f,f',f''\in S_-$. *Тогда*

$${}_1R_\lambda\ B_\nu f(x)=(B_\nu-\lambda^2){}_1R_\lambda f(x),\ \ x>0.$$

Доказательство. В обозначениях (3.26) $\alpha = 1,\ a = +\infty$,

$$K(x,t) = \lambda t \frac{J_1\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}} = -\frac{\lambda^2 t}{2}{}_0F_1\left(2; -\frac{\lambda^2(t^2-x^2)}{4}\right),$$

тогда для выполнения условий (3.28) и (3.29) достаточно потребовать абсолютную интегрируемость на бесконечности функций

$$t^{-\frac{1}{2}}f(t),\ t^{-\frac{3}{2}}f'(t),\ t^{-\frac{1}{2}}f''(t) \in L_1(a,\infty),\ a>0. \tag{3.30}$$

Как и в случае оператора ${}_1J_\lambda$, условие 2 дает $\nu = \mu$.
Условие 1: $\omega = -2\dfrac{d}{dx}K(x,x) = -\lambda^2$.
Условие 3: $-\left(\lambda^2 + \dfrac{2\nu+1}{t^2}\right)K(x,t) + \dfrac{2\nu+1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}K(x,t)+$

$$+\frac{2\nu+1}{t}\frac{\partial}{\partial t}K(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}K(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}K(x,t) =$$

$$= -\frac{\lambda^3 t}{\sqrt{t^2-x^2}}\left(J_1\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right) - 4\frac{J_2\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\lambda\sqrt{t^2-x^2}} + J_3\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)\right) \equiv 0.$$

Условие 4: $\lim\limits_{t\to\infty}\left[2\nu\lambda\dfrac{J_1\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}}f(t)+\right.$

$$\left.+\lambda^2 t^2\frac{J_2\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}}f(t) + \lambda t\frac{J_1\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}}f'(t)\right] =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[t^{-3/2}f(t) + t^{-1/2}f(t) + t^{-1/2}f'(t)\right] = 0, \tag{3.31}$$

таким образом, вместе с выполнением условия (3.30) нужно потребовать выполнение (3.31). При этом условие $f, f', f'' \in S_-$, вынесенное в формулировку теоремы, является достаточным. Последние выкладки справедливы только при $\operatorname{Im}\lambda = 0$, при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ ограничения на функцию должны быть жестче.

Заметим, что для частного значения $\nu = -\frac{1}{2}$, при котором оператор Бесселя является оператором двухкратного дифференцирования $B_{-\frac{1}{2}} = D^2 = \dfrac{d^2}{dx^2}$ аналоги следствий 3.1 и 3.2 приведены в [50].

Известные результаты из [50], [116], [92] о сверточных свойствах операторов Эрдейи-Кобера, обобщенных операторов Эрдейи-Кобера (3.14)-(3.15), операторов Сонина-Пуассона-Дельсарта, несверточных операторов (3.10)-(3.13) также следуют из теоремы 3.1. При помощи этой теоремы также возможно вывести условия, при которых операторы ${}_kR_\lambda,\ {}_kJ_\lambda,\ 2\leq k\leq 9$ являются ОП ВЭЛ.

В работе [25] при помощи интегральных операторов Сайго [140], [141] построен ОП, действующий по формуле

$$I(\nu)\left(x^2B_\nu\right)=\left(x^2B_{-\nu}\right)I(\nu).$$

Покажем, что построение таких ОП и в более общем случае пары операторов $(x^2B_\mu,\ x^2B_\nu)$ сводится к построению ОП ВЭЛ.

Введем операторы замены по формулам

$$[Cf(x)](t)=f(e^t),\ [C^{-1}g(t)](x)=g(\ln x).$$

Тогда справедлива

Теорема 3.2. *Пусть дан ОП ВЭЛ $T(a,b)$:*

$$T(a,b)(D^2+a)=(D^2+b)T(a,b), \tag{3.32}$$

тогда оператор

$$I(\mu,\nu)=C^{-1}\ e^{-\nu t}\ T(-\mu^2,-\nu^2)\ e^{\mu t}\ C$$

является ОП:

$$I(\mu,\nu)(x^2B_\mu)=(x^2B_\nu)I(\mu,\nu). \tag{3.33}$$

Обратно, пусть задан ОП $I(\mu,\nu)$, для которого справедлива формула (3.33). Тогда оператор

$$T(-\mu^2,-\nu^2)=e^{\nu t}\ C\ I(\mu,\nu)\ C^{-1}\ e^{-\mu t}$$

является ОП ВЭЛ и для него справедлива формула (3.32) при $a=-\mu^2, b=-\nu^2$.

Доказательство. Посчитаем композицию операторов

$$C^{-1}\ e^{-\nu t}\ T(-\mu^2,-\nu^2)\ e^{\mu t}\ C$$

и оператора (x^2B_μ). Пользуясь правилами дифференцирования произведения двух функций и сложной функции несложно получить следующие формулы:

$$DCf(x)=\frac{d}{dx}f\left(e^x\right)=e^xf'\left(e^x\right)=e^xCDf(x)\Rightarrow CDf(x)=e^{-x}DCf(x);$$

$$D^2Cf(x)=e^{2x}CD^2f(x)+e^xCDf(x)=e^{2x}CD^2f(x)+DCf(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow CD^2f(x)=e^{-2x}\left(D^2C-DC\right)f(x);$$

$$Cx^2B_\mu f(x)=\left(e^{2x}CD^2+(2\mu+1)e^xCD\right)f(x)=\left(D^2+2\mu D\right)Cf(x);$$

$$D^2 e^{ax} f(x) = e^{ax} D^2 f(x) + 2a e^{ax} D f(x) + a^2 e^{ax} f(x) \Rightarrow e^{\mu x}\left(D^2 + 2\mu D\right) = \left(D^2 - \mu^2\right) e^{\mu x}. \tag{3.34}$$

Применяя последовательно эти формулы, имеем

$$e^{\mu x} C(x^2 B_\mu) f(x) = \left(D^2 - \mu^2\right) e^{\mu x} C f(x)$$

и

$$T(-\mu^2, -\nu^2) e^{\mu x} C(x^2 B_\mu) f(x) = \left(D^2 - \nu^2\right) T(-\mu^2, -\nu^2) e^{\mu x} C f(x). \tag{3.35}$$

Далее

$$D e^{ax} f(x) = e^{ax} D f(x) + a e^{ax} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\nu x}\left(D^2 - \nu^2\right) f(x) = D^2 e^{-\nu x} + 2\nu e^{-\nu x}(D - \nu) f(x) = \left(D^2 + 2\nu D\right) e^{-\nu x} f(x);$$

$$D C^{-1} f(x) = \frac{1}{x} C^{-1} D f(x) \Rightarrow C^{-1} D f(x) = x D C^{-1} f(x);$$

$$D^2 C^{-1} f(x) = \frac{1}{x^2} C^{-1}\left(D^2 - D\right) f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C^{-1} D^2 f(x) = \left(x^2 D^2 + x D\right) C^{-1} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C^{-1} e^{-\nu x}\left(D^2 - \nu^2\right) f(x) = C^{-1}\left(D^2 + 2\nu D\right) e^{-\nu x} f(x) =$$

$$= \left(x^2 D^2 + x D + 2\nu x D\right) C^{-1} f(x) = x^2 B_\nu C^{-1} f(x). \tag{3.36}$$

Сочетая (3.35) и (3.36) получаем прямое утверждение теоремы. Несложно видеть, что приведенные выше выкладки одновременно доказывают и обратное утверждение теоремы.

Таким образом установлено взаимно-однозначное соответствие между ОП, удовлетворяющими (3.32) и (3.33). ОП ВЭЛ, удовлетворяющие (3.32), могут быть описаны через единственный такой оператор T_0 и семейство операторов, коммутирующих с D^2. Именно, для любого T_1, удовлетворяющего (3.32), оператор $(T_1 T_0^{-1})$ коммутирует с D^2 и $T_1 = (T_1 T_0^{-1}) T_0$. Следовательно, то же справедливо и для ОП (3.33).

Например, операторы Сайго из $I_{0+}^{\alpha,-2\nu,\eta}$ и $I_{-}^{\alpha,-2\nu,\eta}$ [25] позволяют построить ОП, коммутирующие с $(D^2 - \nu^2)$:

$$T_+ f(x) = \frac{e^{(\nu-\alpha)x}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{x} (e^x - e^t)^{\alpha-1} e^{(1-\nu)t} {}_2F_1(\alpha - 2\nu, -\eta; \alpha; 1 - e^{t-x}) f(t) dt,$$

$$T_- f(x) = \frac{e^{-\nu x}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{x}^{\infty} (e^t - e^x)^{\alpha-1} e^{-(1-\nu+\alpha)t} {}_2F_1(\alpha - 2\nu, -\eta; \alpha; 1 - e^{x-t}) f(t) dt,$$

где α и η - свободные параметры.

Отметим, что метод ОП в существенной мере был разработан при рассмотрении пары операторов $(B_\nu,\ D^2)$ для операторов Сонина-Пуассона-Дельсарта и их модификаций [77], [78], [102], [30].

3.4. Полугрупповое свойство ОП ВЭЛ

Теорема 3.3. *Пусть* $f \in S_{0+}$. *Тогда при* $0 < x$ *справедлива формула* ${}_1J_\lambda\, {}_1J_\mu f(x) = {}_1J_{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} f(x)$.

Доказательство.

$$\left({}_1J_\lambda\, {}_1J_\mu f\right)(x) = {}_1J_\lambda \left[f(x) - \mu \int\limits_0^x t \frac{J_1\left(\mu\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}} f(t)dt \right](x) =$$

$$= {}_1J_\lambda f(x) - \mu \int\limits_0^x t \frac{J_1\left(\mu\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}} f(t)dt +$$

$$+\lambda\mu \int\limits_0^x t \frac{J_1\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}} \int\limits_0^t s \frac{J_1\left(\mu\sqrt{t^2-s^2}\right)}{\sqrt{t^2-s^2}} f(s)dsdt =$$

$$= {}_1J_\lambda f(x) + {}_1J_\mu f(x) - f(x) + \lambda\mu \int\limits_0^x s f(s) I^{\mu,\lambda}(s,x)ds, \qquad (3.37)$$

где

$$I^{\mu,\lambda}(s,x) = \int\limits_s^x \frac{J_1\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}} \frac{J_1\left(\mu\sqrt{t^2-s^2}\right)}{\sqrt{t^2-s^2}} tdt =$$

$$\left\{ y = \sqrt{t^2-s^2}, t = \sqrt{s^2+y^2}, tdt = ydy, a = \sqrt{x^2-s^2} \right\}$$

$$= \int\limits_0^a J_1(\mu y) \frac{J_1\left(\lambda\sqrt{a^2-y^2}\right)}{\sqrt{a^2-y^2}} dy = K(a).$$

Изменение порядка интегрирования в (3.37) допустимо, т.к. интервал интегрирования конечен и подынтегральная функция непрерывна на $0 \le t \le x$, $0 \le s \le t$.

Разложим функцию $J_1\left(\lambda\sqrt{a^2-y^2}\right)$ в ряд (он равномерно сходится) и проинтегрируем его почленно:

$$K(a) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}\lambda^{2m-1}}{2^{2m-1} m!\,(m-1)!} \int\limits_0^a \left(a^2-y^2\right)^{m-1} J_1(\mu y)dy =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}\lambda^{2m-1}a^{m-1}}{2^m m! \mu^m} \left[\frac{\left(\frac{a\mu}{2}\right)^{m-1}}{(m-1)!} - J_{m-1}(a\mu) \right].$$

Один из двух рядов легко суммируется:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}\lambda^{2m-1}a^{2m-2}}{2^{2m-1}\mu m!(m-1)!} = \frac{1}{a\mu} J_1(a\lambda).$$

Второй ряд Неймана после преобразования суммируется по формуле из [6]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}\lambda^{2m-1}a^{m-1}}{2^m m!\mu^m} J_{m-1}(a\mu) =$$

$$= \frac{1}{a^2\lambda\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a^2\lambda^2}{2}\right)^m \frac{(a\mu)^{1-m}}{m!} J_{1-m}(a\mu) - \frac{J_1(a\mu)}{a\lambda} =$$

$$= \frac{1}{a\lambda\mu}\sqrt{\lambda^2+\mu^2} J_1\left(a\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\right) - \frac{J_1(a\mu)}{a\lambda}.$$

Таким образом,

$$K(a) = \frac{1}{a\lambda} J_1(a\mu) + \frac{1}{a\mu} J_1(a\lambda) - \frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}{a\lambda\mu} J_1\left(a\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\right).$$

$$I^{\mu,\lambda}(s,x) = \frac{1}{\lambda\mu\sqrt{x^2-s^2}} \left(\mu J_1\left(\mu\sqrt{x^2-s^2}\right) + \lambda J_1\left(\lambda\sqrt{x^2-s^2}\right) - \right.$$
$$\left. -\sqrt{\lambda^2+\mu^2} J_1\left(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{x^2-s^2}\right)\right). \tag{3.38}$$

Подставляя $I^{\mu,\lambda}(s,x)$, в (3.37) получаем утверждение теоремы.

Формула для суммы ряда Неймана, использованная при вычислении $K(a)$, приведена в [6] с ограничением $|\mu| < |\lambda|$. Но $I(s,t)$ симметрична по λ и μ, следовательно случай $|\mu| > |\lambda|$ также возможен. Формула остается справедливой и в случае $|\mu| = |\lambda|$, т.к. $J_1(\lambda x)$ - целая функция λ и вследствие аналитичности интеграла по параметру.

Теорема 3.4. *Пусть* $f \in S_-$. *Тогда* ${}_1R_\lambda\ {}_1R_\mu f(x) = {}_1R_{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} f(x)$ *при* $x > 0$, $Im\ \lambda = 0$, $Im\ \mu = 0$.

Доказательство.

$$\left({}_1R_{\lambda 1}R_\mu f\right)(x) =$$

$$= {}_1R_\lambda f(x) + {}_1R_\mu f(x) - f(x) + \lambda\mu \int_x^\infty s f(s) I^{\lambda,\mu}(x,s) ds =$$

$$= {}_1R_{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} f(x).$$

Опять остановимся на обосновании допустимости изменения порядка интегрирования. Этот случай сложнее, чем в предыдущей теореме, т.к. здесь мы имеем дело с несобственными (внутренним и внешним) интегралами:

$$\int_x^\infty t \frac{J_1\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}} \int_t^\infty s \frac{J_1\left(\mu\sqrt{s^2-t^2}\right)}{\sqrt{s^2-t^2}} f(s) ds dt.$$

По известной теореме о сходимости кратного интеграла достаточно гарантировать абсолютную сходимость одного из повторных интегралов. Выведем условия сходимости интеграла

$$\int\limits_x^s \left| \frac{J_1\left(\mu\sqrt{s^2-t^2}\right)}{\sqrt{s^2-t^2}} \frac{J_1\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}} \right| t dt.$$

После замены переменной $t^2 = \tau$ и переобозначений $x^2 = \chi, \ s^2 = \sigma$ имеем:

$$\int\limits_\chi^\sigma \left| \frac{J_1\left(\mu\sqrt{\sigma-\tau}\right)}{\sqrt{\sigma-\tau}} \frac{J_1\left(\lambda\sqrt{\tau-\chi}\right)}{\sqrt{\tau-\chi}} \right| d\tau \leq$$

$$\leq K(\lambda,\mu) \int\limits_\chi^\sigma (\sigma-\tau)^{-3/4} (\tau-\chi)^{-3/4} \, d\tau \leq \frac{\hat{K}(\lambda,\mu)}{\sqrt{\sigma-\chi}},$$

Здесь мы воспользовались известной оценкой для функции Бесселя на бесконечности (2.6) $|J_1(z)| \leq Cz^{-1/2}, \ z \to \infty, \mathrm{Im}\, z = 0$, где C - некоторая константа, не зависящая от z. Окончательно

$$\int\limits_x^\infty \int\limits_x^s \left| sf(s) \frac{J_1\left(\mu\sqrt{s^2-t^2}\right)}{\sqrt{s^2-t^2}} \frac{J_1\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}} t \right| dt ds \leq$$

$$\leq \tilde{K}(\lambda,\mu) \int\limits_x^\infty \frac{s}{\sqrt{s^2-x^2}} |f(s)| ds. \tag{3.39}$$

Условие сходимости ${}_1R_\lambda f(x)$ (3.19) мягче, чем (3.39), таким образом достаточно потребовать интегрируемость на бесконечности $|f(x)|$. Как обычно, для универсальности и чтобы не заострять внимание на уточнении пространств функций, а сосредоточиться на выводе формул, в заголовок теоремы мы вынесли условие заведомо более жесткое, чем то, которое получается в процессе доказательства.

Таким образом справедлива

Теорема 3.5. *Операторы ${}_1J_\lambda$ и ${}_1R_\lambda$ образуют полугруппу операторов по параметру $\sqrt{\lambda}$ ($Im\ \lambda = 0$) при выполнении соответствующих условий из теорем 3.3 и 3.4 и для них справедливы следующие экспоненциальные представления:*

$${}_1J_{\sqrt{\lambda}} f = \left(\exp\left(-\frac{\lambda}{2} \int\limits_0^x t \circ dt \right) \right) f,$$

$${}_1R_{\sqrt{\lambda}} f = \left(\exp\left(-\frac{\lambda}{2} \int\limits_x^\infty t \circ dt \right) \right) f.$$

Доказательство. Прежде всего поясним термин "полугруппа по параметру $\sqrt{\lambda}$". Рассмотрим оператор $j_\lambda = {}_1J_{\sqrt{\lambda}}$. Тогда ${}_1J_{\sqrt{\lambda}}{}_1J_{\sqrt{\mu}} = j_\lambda j_\mu = {}_1J_{\sqrt{\lambda+\mu}} = j_{\lambda+\mu}$. Будем говорить, что оператор ${}_1J_\lambda$ (и ${}_1R_\lambda$) образует полугруппу операторов по параметру $\sqrt{\lambda}$. Приведенные рассуждения делают прозрачной формулу расчета производящего оператора полугруппы:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left[{}_1J_{\sqrt{\alpha}}f - f\right] = -\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_0^x t\frac{J_1\left(\sqrt{\alpha}\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}}f(t)dt =$$

$$= -\int\limits_0^x t\lim_{\alpha\to 0}\frac{J_1\left(\sqrt{\alpha}\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{\alpha}\sqrt{x^2-t^2}}f(t)dt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x tf(t)dt.$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left[{}_1R_{\sqrt{\alpha}}f - f\right] = -\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_x^\infty t\frac{J_1\left(\sqrt{\alpha}\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{t^2-x^2}}f(t)dt =$$

$$= -\int\limits_x^\infty t\lim_{\alpha\to 0}\frac{J_1\left(\sqrt{\alpha}\sqrt{t^2-x^2}\right)}{\sqrt{\alpha}\sqrt{t^2-x^2}}f(t)dt = -\frac{1}{2}\int\limits_x^\infty tf(t)dt.$$

Необходимо обосновать допустимость внесения предела под знак интеграла. Воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Для ядер обоих операторов справедлива оценка $\left|\frac{J_1(z)}{z}\right| \leq K$ $(\mathrm{Im}\, z = 0)$, где K - константа, не зависящая от z. Следовательно, условия, наложенные нами на функцию в теоремах 3.3 и 3.4, гарантируют допустимость перехода к пределу под знаком интеграла.

Аналогичными свойствами обладают и остальные операторы ${}_kJ_\lambda$, ${}_kR_\lambda$. Отметим, что полученные полугрупповые свойства являются предельными для результатов из [50].

3.5. Построение новых ОП ВЭЛ

В этом пункте строятся новые ОП путем композиции из известных. Ядра этих новых ОП выражаются через гипергеометрические функции двух переменных. Общие схемы, которые мы здесь используем, подробно описаны в [24].

Теорема 3.6. *Образуем композицию* ${}_9J_\lambda(\alpha) = I^\alpha_{0+}\ {}_1J_\lambda$. *Этот оператор является ОП* ${}_9J_\lambda(\alpha)D^2f = (D^2+\lambda^2)\ {}_9J_\lambda(\alpha)f$ *при* ${}_1J_\lambda f \in I^2_{0+}(L_1)$, $Re\ \alpha > 1$ *и выполненных условиях на функцию f следствия 3.1 и имеет интегральное представление:*

$${}_9J_\lambda(\alpha)f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^x\left(\frac{x^2-s^2}{2x}\right)^\alpha \times$$

$$\times \Xi_2\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}; \alpha+1; 1-\frac{s^2}{x^2}, \frac{\lambda^2}{4}(s^2-x^2)\right) Df(s)ds. \qquad (3.40)$$

Доказательство. Сплетающее свойство введенного оператора выводится из сплетающего свойства оператора ${}_1J_\lambda$ и свойства оператора I^α_{0+} коммутировать с D^k, $k=0,1,\ldots$ при соответствующих условиях на функции [50]. Получим интегральное представление введенного оператора:

$$\left(I^\alpha_{0+}\ {}_1J_\lambda f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}\int\limits_0^t J_0\left(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\right) Df(s)dsdt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x Df(s)\int\limits_s^x \frac{J_0\left(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\right)}{(x-t)^{1-\alpha}}dtds, \qquad (3.41)$$

здесь изменение порядка интегрирования допустимо, т.к. подынтегральная функция непрерывна и интервал интегрирования конечен.

Разложим функцию Бесселя в ряд (он сходится равномерно) и почленно его проинтегрируем:

$$\int\limits_s^x \frac{J_0\left(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\right)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m}}{m!m!}\int\limits_s^x (x-t)^{\alpha-1}\left(t^2-s^2\right)^m dt =$$

$$\left\{\begin{array}{ll} y=\dfrac{t-s}{x-s}, & t=(x-s)y+s \\ dt=(x-s)dy & \end{array}\right\}$$

$$= (x-s)^\alpha \sum_{m=0}^\infty \frac{\left(-\frac{\lambda^2}{2}(x-s)s\right)^m}{m!m!}\int\limits_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^m\left(1+\frac{x-s}{2s}y\right)^m dy =$$

$$= (x-s)^\alpha\Gamma(\alpha)\sum_{m=0}^\infty \frac{\left(-\frac{\lambda^2}{2}(x-s)s\right)^m}{m!\Gamma(\alpha+m+1)}\,{}_2F_1\left(-m, m+1; \alpha+m+1; \frac{s-x}{2s}\right) =$$

$$= \Gamma(\alpha)\left(\frac{x^2-s^2}{2x}\right)^\alpha\sum_{m=0}^\infty \frac{\left(-\frac{\lambda^2}{4}(x^2-s^2)\right)^m}{m!\Gamma(\alpha+m+1)}\,{}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}; \alpha+m+1; \frac{x^2-s^2}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{x^2-s^2}{2x}\right)^\alpha \Xi_2\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}; \alpha+1; 1-\frac{s^2}{x^2}, \frac{\lambda^2}{4}\left(s^2-x^2\right)\right).$$

Подставляя последнее выражение в (3.41), получаем утверждение теоремы. Здесь мы воспользовались формулами для функции Гаусса ${}_2F_1$ из [5] и формулой выражения Ξ_2 в виде ряда с функцией Гаусса из [11].

Теорема 3.7. *Для тех же операторов образуем композицию* ${}_{10}J_\lambda(\alpha) = {}_1J_\lambda\ I^\alpha_{0+} = I^{-\alpha}_{0+}\ {}_9J_\lambda(\alpha)\ I^\alpha_{0+}$. *Этот оператор является ОП* ${}_{10}J_\lambda(\alpha)\ D^2 f =$

$(D^2+\lambda^2)_{10}J_\lambda(\alpha)f$ *при* $f\in I^1_{0+}(L_1)$, $Re\ \alpha>1$ *и выполненных условиях на функцию* f *следствия 3.1 и имеет интегральное представление:*

$$ {}_{10}J_\lambda(\alpha)f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^x\left(\frac{x^2-s^2}{2s}\right)^\alpha\times $$

$$ \times\Xi_2\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2};\alpha+1;1-\frac{x^2}{s^2},\frac{\lambda^2}{4}(s^2-x^2)\right)Df(s)ds. \qquad (3.42) $$

Доказательство. Алгоритм доказательства полностью аналогичен предыдущему. Приведем лишь основные этапы вычислений:

$$ {}_1J_\lambda\ I^\alpha_{0+}=\int\limits_0^x J_0\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)D\ I^\alpha_{0+}f(t)dt= $$

$$ =\int\limits_0^x J_0\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\ I^\alpha_{0+}Df(t)dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x Df(s)\int\limits_s^x J_0\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)(t-s)^{\alpha-1}dt\,ds, $$

$$ \int\limits_s^x J_0\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)(t-s)^{\alpha-1}dt= $$

$$ =\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m}}{m!m!}(x-s)^{m+\alpha}(2x)^m\int\limits_0^1(1-y)^{\alpha-1}y^m\left(1-y\frac{x-s}{2x}\right)^m dy= $$

$$ =\sum_{m=0}^\infty\frac{\left(-\frac{\lambda^2}{2}(x-s)x\right)^m}{m!m!}(x-s)^\alpha\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+m+1)}{}_2F_1\left(-m,m+1;\alpha+m+1;-\frac{x-s}{2x}\right)= $$

$$ =\left(\frac{x^2-s^2}{2s}\right)^\alpha\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\Xi_2\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2};\alpha+1;1-\frac{x^2}{s^2},\frac{\lambda^2}{4}(s^2-x^2)\right). $$

Введенные операторы (3.40)-(3.42) при $\lambda=0$ сводятся к дробным интегралам Римана-Лиувилля, а при $\alpha=0$ - к ОП ВЭЛ J_λ и R_λ. Поэтому они могут рассматриваться как обобщения этих двух классов операторов.

Следуя [54] введем оператор СПД (Сонина-Пуассона-Дельсарта)

$$ {}_0S^\nu_{0+}f(x)=\frac{2^{\nu+2}}{\Gamma(-\nu-1)}x\int\limits_0^x(x^2-t^2)^{-\nu-2}t^{\nu+1}f(t)dt,\ \mathrm{Re}\ \nu<-1. $$

Очевидно, этот оператор определен на непрерывных функциях, интегрируемых в нуле с весом $t^{\nu+1}$: $t^{\nu+1}f(t)\in L(0,a)$, для некоторого $a>0$.

Оператор $X_\nu={}_0S^{\nu-\frac12}_{0+}x^\nu$ является ОП: $X_\nu\ B_\nu\ f=D^2\ X_\nu\ f$.

Теорема 3.8. *Образуем композицию* $S_{0+}(\lambda,\nu)={}_3J_\lambda\ {}_0S^{\nu-\frac12}_{0+}x^\nu$, $Re\ \nu<-1/2$. *Этот оператор является ОП:* $S_{0+}(\lambda,\nu)\ B_\nu\ f=(D^2+\lambda^2)\ S_{0+}(\lambda,\nu)\ f$ *на функциях* $f\in S_{0+}$ *и имеет интегральное представление:*

$$ S_{0+}(\lambda,\nu)f(x)={}_0S^{\nu-\frac12}_{0+}x^\nu\ f(x)+\frac{2^{\nu+\frac32}}{\Gamma(-\nu-\frac12)}\int\limits_0^x K_{\lambda,\nu}(x,s)f(s)ds, $$

где

$$K_{\lambda,\nu}(x,s) = s^{2\nu+\frac{3}{2}}(x^2-s^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}\left[\Xi_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}-\nu;\frac{s^2-x^2}{s^2},\frac{\lambda^2(x^2-s^2)}{4}\right)-\frac{x}{s}\right].$$

Доказательство: Снова приведем лишь основные выкладки расчета ядра:

$$ {}_3J_\lambda\ {}_0S_{0+}^{\nu-\frac{1}{2}}x^\nu = {}_0S_{0+}^{\nu-\frac{1}{2}}x^\nu\ f(x)+$$

$$+\lambda\int\limits_0^x t\frac{I_1\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}}\frac{2^{\nu+3/2}}{\Gamma(-\nu-\frac{1}{2})}t\int\limits_0^t(t^2-s^2)^{-\nu-3/2}s^{2\nu+1/2}f(s)ds\ dt = \quad (3.43)$$

$$= {}_0S_{0+}^{\nu-\frac{1}{2}}x^\nu\ f(x)+\lambda\frac{2^{\nu+3/2}}{\Gamma(-\nu-\frac{1}{2})}\int\limits_0^x s^{2\nu+1/2}f(s)\int\limits_s^x\frac{I_1\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}}t^2(t^2-s^2)^{-\nu-3/2}dt\ ds.$$

Для обоснования допустимости изменения порядка интегрирования оценим модуль подынтегральной функции при $0<s<t<x$:

$$\left|\frac{I_1\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}}t^2(t^2-s^2)^{-\nu-3/2}\right|\le 2C(\lambda,x)\left(t^2-s^2\right)^{-\nu-3/2}t,$$

тогда внутренний интеграл оценивается при $\mathrm{Re}\,\nu<-1/2$

$$\int\limits_s^x\left(t^2-s^2\right)^{-\nu-3/2}2tdt = \int\limits_0^{x^2-s^2}\tau^{-\nu-3/2}d\tau =$$

$$=\left(x^2-s^2\right)^{-\nu-1/2}\le x^{-2\nu-1}.$$

Следовательно изменение порядка интегрирования допусимо при $f\in S_{0+}$. Наконец, вычислим внутренний интеграл:

$$\int\limits_s^x\frac{I_1\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}}t^2(t^2-s^2)^{-\nu-3/2}dt =$$

$$\left\{\begin{array}{ll} y=\dfrac{x^2-t^2}{x^2-s^2}, & t=\sqrt{x^2-y\left(x^2-s^2\right)} \\ dt=-\dfrac{x^2-s^2}{2\sqrt{x^2-y\left(x^2-s^2\right)}}dy & \end{array}\right\}$$

$$=\int\limits_0^1\frac{I_1\left(\lambda\sqrt{y\left(x^2-s^2\right)}\right)}{\sqrt{y\left(x^2-s^2\right)}}\left(x^2-y\left(x^2-s^2\right)\right)\left(\left(x^2-s^2\right)(1-y)\right)^{-\nu-3/2}\frac{x^2-s^2}{2\sqrt{x^2-y\left(x^2-s^2\right)}}dy =$$

$$=\frac{\lambda}{4}s\left(x^2-s^2\right)^{-\nu-1/2}\sum_{m=0}^\infty\frac{\left(\frac{\lambda^2\left(x^2-s^2\right)}{4}\right)^m}{(m+1)!\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)_{m+1}}{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},-\nu-\frac{1}{2};m-\nu+\frac{1}{2};\frac{s^2-x^2}{s^2}\right)=$$

$$=\frac{s}{\lambda}\left(x^2-s^2\right)^{-\nu-3/2}\left[\Xi_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}-\nu;\frac{s^2-x^2}{s^2},\frac{\lambda^2(x^2-s^2)}{4}\right)-\frac{x}{s}\right].$$

3.6. Формулы для интегралов с функциями Бесселя

При выводе результатов данной главы нами были получены следующие формулы для интегралов:

$$\int\limits_s^x \frac{I_1(\lambda\sqrt{x^2-t^2})}{\sqrt{x^2-t^2}} t^2(t^2-s^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}\,dt = \frac{s}{\lambda}(x^2-s^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}\times$$

$$\times\left[\Xi_2\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}-\nu;\ -\frac{1}{2}-\nu;\ \frac{x^2-s^2}{s^2},\ \frac{\lambda^2(x^2-s^2)}{4}\right)-\frac{x}{s}\right],\ x>s>0,\ \mathrm{Re}\,\nu<-\frac{1}{2};$$

$$I^{\mu,\lambda}(s,x)=\int\limits_s^x \frac{J_1(\lambda\sqrt{x^2-t^2})}{\sqrt{x^2-t^2}}\frac{J_1(\mu\sqrt{t^2-s^2})}{\sqrt{t^2-s^2}}t\,dt=\frac{1}{\lambda\mu\sqrt{x^2-s^2}}\times$$

$$\times\left(\mu J_1(\mu\sqrt{x^2-s^2})+\lambda J_1(\lambda\sqrt{x^2-s^2})-\sqrt{\lambda^2+\mu^2}J_1(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{x^2-s^2})\right),\ x>s>0.$$

Эти формулы отсутствуют в справочниках.

3.7. Формулы композиций для операторов Бушмана-Эрдейи

Определим операторы Бушмана-Эрдейи по формулам

$$\left(B_{0+}^{\nu,\mu}f\right)(x)=\int\limits_0^x\left(x^2-y^2\right)^{-\mu/2}P_\nu^\mu\left(\frac{x}{y}\right)f(y)dy, \tag{3.44}$$

$$\left(E_{0+}^{\nu,\mu}f\right)(x)=\int\limits_0^x\left(x^2-y^2\right)^{-\mu/2}\mathbf{P}_\nu^\mu\left(\frac{y}{x}\right)f(y)dy, \tag{3.45}$$

$$\left(B_{-}^{\nu,\mu}f\right)(x)=\int\limits_x^\infty\left(y^2-x^2\right)^{-\mu/2}P_\nu^\mu\left(\frac{y}{x}\right)f(y)dy, \tag{3.46}$$

$$\left(E_{-}^{\nu,\mu}f\right)(x)=\int\limits_x^\infty\left(y^2-x^2\right)^{-\mu/2}\mathbf{P}_\nu^\mu\left(\frac{x}{y}\right)f(y)dy, \tag{3.47}$$

где $P_\nu^\mu(z)$ - функция Лежандра I рода, $\mathbf{P}_\nu^\mu(t)$ - та же функция на разрезе $-1<t<1$, на протяжении всего параграфа $\mathrm{Re}\,\mu<1,\ x\geq 0$.

Здесь и далее операторы типа (3.44)-(3.45) рассматриваются на пространстве S_{0+}, а операторы типа (3.46)-(3.47) рассматриваются на пространстве S_-. Мы используем стандартные обозначения для лево- и правосторонних интегралов Римана-Лиувилля и операторов Эрдейи-Кобера из монографии [50], мы также приводили их определения в начале главы (формулы (3.4)-(3.7)).

Мы получим формулы для различных композиций операторов (3.44)-(3.47).

Операторы Бушмана-Эрдейи являются с точностью до степенных множителей одномерными проекциями преобразования Радона на собственные подпространства сферических гармоник [120], [46], [86], [87]. Поэтому полученные результаты могут быть применены для вывода формул композиций двух преобразований Радона в виде ряда по сферическим гармоникам.

В [54] доказаны формулы факторизации для операторов Бушмана-Эрдейи через операторы дробного интегродифференцирования и Эрдейи-Кобера, определенные нами в (3.4)-(3.7):

$$B_{0+}^{\nu,\mu} = I_{0+}^{\nu-\mu+2} I_{0+;2,\nu+1/2}^{-(\nu+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1}, \tag{3.48}$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} I_{0+;2,-1/2}^{\nu+1} I_{0+}^{-(\nu+\mu)}, \tag{3.49}$$

$$B_{-}^{\nu,\mu} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1} I_{-;2,\nu+1}^{-(\nu+1)} I_{-}^{\nu-\mu+2}, \tag{3.50}$$

$$E_{-}^{\nu,\mu} = I_{0+}^{-(\nu+\mu)} I_{-;2,0}^{\nu+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}. \tag{3.51}$$

Следовательно, при значениях $\mu = -\nu$ для E_{0+}, E_{-} и при значениях $\mu = \nu+2$ для B_{0+}, B_{-} операторы Бушмана-Эрдейи совпадают с точностью до степенного множителя с операторами Эрдейи-Кобера, фактически, как показано в [54], в этом случае они являются известными операторами преобразования Сонина-Пуассона-Дельсарта. При значениях $\nu = 0$ операторы (3.44)-(3.47) являются дробными интегралами Римана-Лиувилля

$$B_{0+}^{0,\mu} = E_{0+}^{0,\mu} = I_{0+}^{1-\mu}, \ \mathrm{Re}\,\mu < 1,$$

$$B_{-}^{0,\mu} = E_{-}^{0,\mu} = I_{-}^{1-\mu}, \ \mathrm{Re}\,\mu < 1.$$

Из факторизаций (3.48)-(3.51), формул обращения операторов Эрдейи-Кобера и из группового свойства операторов Римана-Лиувилля следует

Теорема 3.9. *Пусть $Re\,\mu_1 < 1$, $Re\,\mu_2 < 1$, $x \geq 0$. Тогда справедливы формулы*

$$\left(B_{0+}^{\nu,\mu_1} E_{0+}^{\nu,\mu_2} f\right)(x) = \left(I_{0+}^{2-\mu_1-\mu_2} f\right)(x), \ f \in S_{0+}, \tag{3.52}$$

$$\left(E_{-}^{\nu,\mu_1} B_{-}^{\nu,\mu_2} f\right)(x) = \left(I_{-}^{2-\mu_1-\mu_2} f\right)(x), \ f \in S_{-}, \tag{3.53}$$

где I_{0+}^{α}, I_{-}^{α} - дробный интеграл Римана-Лиувилля.

Из теоремы 3.9 следует, что формально справедливы равенства для обратных операторов

$$\left(B_{0+}^{\nu,\mu}\right)^{-1} = E_{0+}^{\nu,2-\mu}, \ \left(E_{0+}^{\nu,\mu}\right)^{-1} = B_{0+}^{\nu,2-\mu},$$

$$(B_{-}^{\nu,\mu})^{-1}=E_{-}^{\nu,2-\mu},\ \ (E_{-}^{\nu,\mu})^{-1}=B_{-}^{\nu,2-\mu}.$$

Для придания этим равенствам точного смысла на функциях из S_{0+} и S_{-} в [54] операторы (3.44)-(3.47) определены для значений параметра $\mu\geq 1$. Формулы обращений зависят от выбранных пространств функций. Случай пространств $C(a,b)$ изучается в [72], [73], [93], [95], [13], [50], [56], [106], [114], [115], [146], [147], пространств типа L_p в [46], [105], [120], пространств L_2 - в [21], [54]. В последних работах, в частности, доказано, что при целых ν в $L_2(0,\infty)$ справедливы формулы обращения

$$\left(B_{0+}^{\nu,1}\right)^{-1}=B_{-}^{\nu,1},\ \ \left(B_{-}^{\nu,1}\right)^{-1}=B_{0+}^{\nu,1},$$

$$\left(E_{0+}^{\nu,1}\right)^{-1}=E_{-}^{\nu,1},\ \ \left(E_{-}^{\nu,1}\right)^{-1}=E_{0+}^{\nu,1},$$

причем все выписанные операторы продолжаются с S_{0+} и S_{-} на $L_2(0,\infty)$ до унитарных.

Теорема 3.10. *Пусть* $\mathrm{Re}\,\mu_1<1,\ \mathrm{Re}\,\mu_2<1,\ f\in S_{0+},\ x\geq 0.$ *Тогда справедлива формула композиции*

$$\left(E_{0+}^{\nu_1,\mu_1}E_{0+}^{\nu_2,\mu_2}f\right)(x)=\int\limits_0^x K_1(\nu_1,\nu_2,\mu_1,\mu_2;x,t)f(t)dt, \tag{3.54}$$

в которой ядро K_1 *выражается через* G*-функцию Мейера*

$$K_1(\nu_1,\nu_2,\mu_1,\mu_2;x,t)=2^{\mu_1+\mu_2-1}\frac{x^{2-\mu_1-\mu_2}}{t}\times$$

$$\times G_{4,4}^{0,4}\left(\frac{x^2}{t^2}\,\middle|\,\begin{matrix}0, & \frac{1}{2}, & \frac{\mu_2}{2}, & -\frac{1}{2}+\frac{\mu_2}{2}\\ -\frac{1}{2}+\frac{\mu_1}{2}+\frac{\mu_2}{2}+\frac{\nu_1}{2}, & -1+\frac{\mu_1}{2}+\frac{\mu_2}{2}-\frac{\nu_1}{2}, & \frac{\mu_2}{2}+\frac{\nu_2}{2}, & -\frac{1}{2}+\frac{\mu_2}{2}+\frac{\nu_2}{2}\end{matrix}\right).$$

Доказательство. Сначала мы докажем представимость суперпозиции двух данных операторов в виде (3.54). Для этого мы, пока формально, изменим порядок интегрирования и получим первую часть утверждения теоремы - формулу (3.54), где

$$K_1(\nu_1,\nu_2,\mu_1,\mu_2;x,t)=\int\limits_t^x\left(x^2-y^2\right)^{-\mu_1/2}\mathbf{P}_{\nu_1}^{\mu_1}\left(\frac{y}{x}\right)\left(y^2-t^2\right)^{-\mu_2/2}\mathbf{P}_{\nu_2}^{\mu_2}\left(\frac{t}{y}\right)dy. \tag{3.55}$$

Теперь обоснуем допустимость изменения порядка интегрирования. Интеграл (3.45) несобственный, подынтегральная функция имеет две особые точки: $y=0$ и $y=x$ (в последней - при $0<\mathrm{Re}\,\mu<1$). Как обычно, оценим модуль подынтегральной функции (3.55):

$$\left|x^2-y^2\right|^{-\mu_1/2}\left|y^2-t^2\right|^{-\mu_2/2}\left|\mathbf{P}_{\nu_1}^{\mu_1}\left(\frac{y}{x}\right)\mathbf{P}_{\nu_2}^{\mu_2}\left(\frac{t}{y}\right)\right|\leq$$

$$\leq K(\mu_1,\mu_2)x^{-\mu_1/2}y^{-\mu_2/2}(x-y)^{-\mu_1/2}(y-t)^{-\mu_2/2}.$$

Мы воспользовались оценкой для функции Лежандра на разрезе $(-1,1)$ $\mathbf{P}_\nu^\mu$, например, из [5]. Тогда, воспользовавшись оценкой $y^{-\mu_2/2}\leq t^{-\mu_2/2}+x^{-\mu_2/2}$, $0<t<y<x$, имеем

$$\int_t^x \left|\left(x^2-y^2\right)^{-\mu_1/2}\mathbf{P}_{\nu_1}^{\mu_1}\left(\frac{y}{x}\right)\left(y^2-t^2\right)^{-\mu_2/2}\mathbf{P}_{\nu_2}^{\mu_2}\left(\frac{t}{y}\right)\right|dy\leq$$

$$\leq K(\mu_1,\mu_2)x^{-\mu_1/2}\left(t^{-\mu_2/2}+x^{-\mu_2/2}\right)\int_t^x(x-y)^{-\mu_1/2}(y-t)^{-\mu_2/2}dy=$$

$$=K(\mu_1,\mu_2)x^{-\mu_1/2}\left(t^{-\mu_2/2}+x^{-\mu_2/2}\right)(x-t)^{1-\frac{\mu_1}{2}-\frac{\mu_2}{2}}B\left(1-\frac{\mu_1}{2},1-\frac{\mu_2}{2}\right),$$

где $B\left(1-\dfrac{\mu_1}{2},1-\dfrac{\mu_2}{2}\right)$ - бета-функция. Таким образом, повторный интеграл сходится абсолютно при $f\in S_{0+}$ и изменение порядка интегрирования разрешено.

Для получения выражения K_1 мы применим преобразование Меллина к суперпозиции (3.54), воспользовавшись факторизацией (3.49) и формулами для преобразований Меллина

$$M[x^\alpha f(x)](s)=M[f(x)](s+\alpha),$$

$$M[f(x^p)](s)=\frac{1}{|p|}M[f(x)]\left(\frac{s}{p}\right),\ p\neq 0,$$

$$M[I_{0+}^\alpha f](s)=\frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}M[f](s+\alpha),$$

$$M[I_{0+;\gamma,\eta}^\alpha f](s)=\frac{\Gamma\left(1+\eta-\frac{s}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(1+\eta+\alpha-\frac{s}{\gamma}\right)}M[f](s),\ \mathrm{Re}\ \left(\eta-\frac{s}{\gamma}\right)>-1.$$

Тогда, последовательно применяя эти формулы, имеем

$$M\left[E_{0+}^{\nu_1,\mu_1}E_{0+}^{\nu_2,\mu_2}f\right](s)=M\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu_1+1}I_{0+;2,-1/2}^{\nu_1+1}I_{0+}^{-(\nu_1+\mu_1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu_2+1}I_{0+;2,-1/2}^{\nu_2+1}I_{0+}^{-(\nu_2+\mu_2)}f\right](s)=$$

$$=\Gamma\left[\begin{array}{cccc}-\frac{\nu_1}{2}-\frac{s}{2}, & \mu_1-s, & \frac{\mu_1}{2}-\frac{\nu_2}{2}-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}, & \mu_1+\mu_2-1-s\\ 1+\frac{\nu_1}{2}-\frac{s}{2}, & -\nu_1-s, & \frac{\mu_1}{2}+\frac{\nu_2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{s}{2}, & \mu_1-\nu_2-1-s\end{array}\right]\times$$
$$\times 2^{-\nu_1-\nu_2-2}M[f](s+2-\mu_1-\mu_2).$$

Это позволяет нам представить искомую композицию в виде

$$\left(E_{0+}^{\nu_1,\mu_1}E_{0+}^{\nu_2,\mu_2}f\right)(x)=x^{2-\mu_1-\mu_2}(Yf)(x),\tag{3.56}$$

где Y - некоторый интегральный оператор. Тогда

$$M\left[E_{0+}^{\nu_1,\mu_1}E_{0+}^{\nu_2,\mu_2}f\right](s)=M[x^{2-\mu_1-\mu_2}(Yf)(x)](s)=M[Yf](s+2-\mu_1-\mu_2).$$

Обозначим $\sigma = s+2-\mu_1-\mu_2$. Тогда, приведя все Г-функции к аргументу $s/2$, мы имеем

$$M[Yf](\sigma) = 2^{\mu_1+\mu_2-2} M[f](\sigma)\times$$

$$\Gamma\left[\begin{array}{llll} 1-\frac{\mu_2}{2}-\frac{\sigma}{2}, & \frac{3}{2}-\frac{\mu_2}{2}-\frac{\sigma}{2}, & \frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}, & 1-\frac{\sigma}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{\mu_1}{2}-\frac{\mu_2}{2}+\frac{\nu_1}{2}-\frac{\sigma}{2}, & \frac{3}{2}-\frac{\mu_1}{2}-\frac{\mu_2}{2}-\frac{\nu_1}{2}-\frac{\sigma}{2}, & \frac{3}{2}-\frac{\mu_2}{2}+\frac{\nu_2}{2}-\frac{\sigma}{2}, & 1-\frac{\mu_2}{2}-\frac{\nu_2}{2}-\frac{\sigma}{2} \end{array}\right]. \tag{3.57}$$

Дробь из Г-функций в (3.57) является образом Меллина G-функции Мейера:

$$M[Yf](\sigma) = 2^{\mu_1+\mu_2-2} M[f](\sigma)\times$$

$$\times M\left[2G^{0,4}_{4,4}\left(z^2\left| \begin{array}{llll} 0, & \frac{1}{2}, & \frac{\mu_2}{2}, & -\frac{1}{2}+\frac{\mu_2}{2} \\ -\frac{1}{2}+\frac{\mu_1}{2}+\frac{\mu_2}{2}+\frac{\nu_1}{2}, & -1+\frac{\mu_1}{2}+\frac{\mu_2}{2}-\frac{\nu_1}{2}, & \frac{\mu_2}{2}+\frac{\nu_2}{2}, & -\frac{1}{2}+\frac{\mu_2}{2}+\frac{\nu_2}{2} \end{array}\right.\right)\right](\sigma).$$

Как указано в [48], при $|z|<1$ функция $G^{0,4}_{4,4}(z)=0$. Тогда, по теореме о свертке Меллина, и воспользовавшись представлением (3.56), окончательно получаем утверждение теоремы. Известно поведение G-функции Мейера на бесконечности, как указано в [5], при больших по модулю значениях аргумента данная G-функция имеет степенной рост, что гарантирует сходимость интеграла (3.54) на функциях из S_{0+}.

Теорема 3.11. *Пусть* $Re\,\mu_1 < 1$, $Re\,\mu_2 < 1$, $f \in S_{0+}$, $x \geq 0$. *Тогда справедлива формула композиции*

$$\left(B^{\nu_1,\mu_1}_{0+} B^{\nu_2,\mu_2}_{0+} f\right)(x) = \int\limits_0^x K_2(\nu_1,\nu_2,\mu_1,\mu_2;x,t) f(t)dt, \tag{3.58}$$

в которой ядро K_2 *выражается через G-функцию Мейера*

$$K_2(\nu_1,\nu_2,\mu_1,\mu_2;x,t) = 2^{\mu_1+\mu_2-1}\frac{x^{2-\mu_1-\mu_2}}{t}\times$$

$$\times G^{0,4}_{4,4}\left(\frac{x^2}{t^2}\left| \begin{array}{llll} \frac{\mu_2}{2}+\frac{\nu_1}{2}, & -\frac{1}{2}+\frac{\mu_2}{2}-\frac{\nu_1}{2}, & \frac{1}{2}+\frac{\nu_2}{2}, & -\frac{\nu_2}{2} \\ -\frac{1}{2}+\frac{\mu_1}{2}+\frac{\mu_2}{2}, & -1+\frac{\mu_1}{2}+\frac{\mu_2}{2}, & \frac{\mu_2}{2}, & -\frac{1}{2}+\frac{\mu_2}{2} \end{array}\right.\right).$$

Алгоритм доказательства существенно повторяет только что приведенный в теореме 3.10. Приведем только расчет образа Меллина композиции операторов:

$$M\left[B^{\nu_1,\mu_1}_{0+} B^{\nu_2,\mu_2}_{0+} f\right](s) = M\left[I^{2+\nu_1-\mu_1}_{0+} I^{-(\nu_1+1)}_{0+;2,\nu_1+1/2}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu_1+1} I^{2+\nu_2-\mu_2}_{0+} I^{-(\nu_2+1)}_{0+;2,\nu_2+1/2}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu_2+1} f\right](s) =$$

$$= \Gamma\left[\begin{array}{llll} \mu_1-\nu_1-1-s, & \frac{\mu_1}{2}+\frac{\nu_1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{s}{2}, & \mu_1+\mu_2-\nu_2-2-s, & \frac{\mu_1}{2}+\frac{\mu_2}{2}+\frac{\nu_2}{2}-\frac{s}{2} \\ 1-s, & \frac{\mu_1}{2}-\frac{\nu_1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}, & \mu_1-s, & \frac{\mu_1}{2}+\frac{\mu_2}{2}-\frac{\nu_2}{2}-1-\frac{s}{2} \end{array}\right]\times$$

$$\times 2^{\nu_1+\nu_2+2} M[f](s+2-\mu_1-\mu_2),$$

откуда, применением обратного преобразования Меллина, получаем выражение ядра нового преобразования через G-функцию Мейера.

Формулы композиций для операторов (3.46)-(3.47) получаются из формул (3.54) и (3.58) при вещественных ν, μ переходом к сопряженным операторам. Эти формулы справедливы и при всех ν, μ.

Частными случаями полученных формул (3.52)-(3.53) являются формулы композиций для операторов дробного интегрирования Римана-Лиувилля и весовых операторов Эрдейи-Кобера (см. [50]):

$$I_{0+}^{\alpha_1} I_{0+}^{\alpha_2} = I_{0+}^{\alpha_1+\alpha_2},$$

$$I_{-}^{\alpha_1} I_{-}^{\alpha_2} = I_{-}^{\alpha_1+\alpha_2},$$

$$I_{0+;2,\alpha+1/2}^{-(\alpha+1)} I_{0+;2,-1/2}^{\alpha+1} = I_{0+}^{2-(\alpha+2)-(-\alpha)} = I,$$

$$I_{-;2,0}^{\alpha+1} I_{-;2,\alpha+1}^{-(\alpha+1)} = I,$$

где I-единичный оператор.

Простым следствием теорем 3.10, 3.11 является

Теорема 3.12. *а) Пусть* $Re\,\nu_1 > -1,\ Re\,\nu_2 > -1,\ f \in S_{0+},\ x \geq 0.$ *Тогда*

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu_1+1} I_{0+;2,-1/2}^{\nu_1+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu_2+1} I_{0+;2,-1/2}^{\nu_2+1} f = \int\limits_0^x K_1'(\nu_1, \nu_2; x, t) f(t) dt,$$

в которой ядро K_1' *выражается через G-функцию Мейера*

$$K_1'(\nu_1, \nu_2; x, t) = 2^{-\nu_1-\nu_2-1} \frac{x^{2+\nu_1+\nu_2}}{t} \times$$

$$\times G_{2,2}^{0,2} \left(\frac{x^2}{t^2} \,\middle|\, \begin{array}{ll} \frac{1}{2}, & -\frac{\nu_2}{2} \\ -\frac{1}{2} - \nu_2, & -1 - \nu_1 - \frac{\nu_2}{2} \end{array} \right).$$

б) Пусть $Re\,\nu_1 < -1,\ Re\,\nu_2 < -1,\ f \in S_{0+},\ x \geq 0.$ *Тогда*

$$I_{0+;2,\nu_1+1/2}^{-(\nu_1+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu_1+1} I_{0+;2,\nu_1+1/2}^{-(\nu_2+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu_2+1} f = \int\limits_0^x K_2'(\nu_1, \nu_2; x, t) f(t) dt,$$

в которой ядро K_2' *выражается через G-функцию Мейера*

$$K_2'(\nu_1, \nu_2; x, t) = 2^{3+\nu_1+\nu_2} \frac{x^{-\nu_1-\nu_2-2}}{t} \times$$

$$\times G_{2,2}^{0,2} \left(\frac{x^2}{t^2} \,\middle|\, \begin{array}{ll} \frac{1}{2} - \frac{\nu_1}{2} + \frac{\nu_2}{2}, & -\frac{\nu_2}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{\nu_1}{2} + \frac{\nu_2}{2}, & 1 + \frac{\nu_2}{2} \end{array} \right).$$

Доказательство. Утверждения а) и б) этой теоремы получаются из теорем 3.10 и 3.11 при значениях параметров $\mu_1 = -\nu_1,\ \mu_2 = -\nu_2$ и $\mu_1 = \nu_1 + 2,\ \mu_2 = \nu_2 + 2$ соответственно, формул факторизации (3.49) и (3.48) и формулы понижения порядка G-функции Мейера.

Библиография

[1] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.

[2] Агранович М.С. Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. ВИНИТИ. 1989, т. 63, с. 5-129.

[3] Бергман С. Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными. М., 1964.

[4] Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера. М., 1983.

[5] Бэйтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.

[6] Бэйтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. М.: Наука, 1966. 295 с.

[7] Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций, ч. 1. М.: ИЛ, 1949. 798 с.

[8] Векуа И.Н. О решении уравнения $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ // Сообщения АН Груз. ССР. 1942, III, №4, с. 307-314.

[9] Векуа И.Н. Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые применения // Сообщения АН Груз. ССР. 1945, VI, №3, с. 177-183.

[10] Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л., 1948. 296 с.

[11] Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я. Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с некоторыми специальными функциями в ядрах и их приложения. Самара, 1992. 99 с.

[12] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.

[13] Динь Хоанг Ань. Интегральные уравнения с функцией Лежандра в ядрах в особых случаях // Докл. АН БССР. 1989, т. 33, №7, с. 591-594.

[14] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.

[15] Катрахов В.В. Спектральная функция некоторых сингулярных дифференциальных операторов. I // Дифференц. уравнения. 1976, т. 12, №7, с. 1256-1266.

[16] Катрахов В.В. Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений // Мат. сб. 1980, т. 112 (154), 3 (7), с. 354-379.

[17] Катрахов В.В. Изометрические операторы преобразования и спектральная функция для одного класса одномерных сингулярных и псевдодифференциальных операторов // ДАН СССР. 1980, т. 251, №5, с. 1048-1051.

[18] Катрахов В.В. Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся уравнений // ДАН СССР. 1980, т. 251, №6, с. 1296-1300.

[19] Катрахов В.В. Операторы преобразования и псевдодифференциальные операторы // Сиб. Мат. Журн. 1980, т. 21, №1, с. 86-97.

[20] Катрахов В.В. Сингулярные краевые задачи и операторы преобразования // В кн.: Корректные краевые задачи для неклассических уравнений матем. физики. Новосибирск, 1981, с. 87-91.

[21] Катрахов В.В. Об одной краевой задаче для уравнения Пуассона // ДАН СССР. 1981, т. 259, №5, с. 1041-1046.

[22] Катрахов В.В. О сингулярной краевой задаче для уравнения Пуассона // Мат. сб. 1991, т. 182, №6, с. 849-876.

[23] Катрахов В.В., Ситник С.М. Краевая задача для стационарного уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом // ДАН СССР. 1984, т. 272, №4, с. 797-799.

[24] Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод факторизации в теории операторов преобразования. В кн.: Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа (сб. памяти Бориса Алексеевича Бубнова). Новосибирск, 1990, с. 104-121.

[25] Килбас А.А., Сайго М., Жук В.А. О композиции операторов обобщенного дробного интегрирования с дифференциальным оператором осесимметрической теории потенциала // Дифференц. уравнения. 1991, т. 27, №9, с. 1640-1642.

[26] Киприянов И.А., Катрахов В.В. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Мат. сб. 1977, т. 104 (146), с. 49-68.

[27] Коренев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в Бесселевых функциях. М.: ГИФМЛ, 1960.

[28] Коренев Б.Г. Введение в теорию Бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 288 с.

[29] Костюченко А.Г., Саргасян И.С. Распределение собственных значений. М.: Наука, 1979. 399 с.

[30] Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1951, т. 6, №2 (42), с. 102-143.

[31] Левитан Б.М. Теория операторов обобщенного сдвига. М., 1973. 312 с.

[32] Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М., 1984. 240 с.

[33] Левитан Б.М., Саргасян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 431 с.

[34] Левондорский С.В., Панеях В.П. Вырождающиеся эллиптические уравнения и краевые задачи // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. ВИНИТИ. 1989, т. 63, с. 131-200.

[35] Ляховецкий Г.В. Формулы композиций для операторов Бушмана-Эрдейи. В кн.: Тез. Докл. междунар. научн. конф. "Дифференциальные и интегральные уравнения. Матем. физика и специальные функции." Самара, 1992, с. 157-158.

[36] Ляховецкий Г.В. Операторы преобразования Векуа-Эрдейи-Лаундеса // ДАН РФ, т. 337 (1994), №4, с. 442-446.

[37] Ляховецкий Г.В. Интеграл с функцией Бесселя. В кн.: Дальневосточный матем. сб., 1997, №3, с. 11-25.

[38] Ляховецкий Г.В., Ситник С.М. Формулы композиций для операторов Бушмана-Эрдейи. Препринт / Институт автоматики и процессов управления ДВО АН СССР. Владивосток, 1991. 11 с.

[39] Ляховецкий Г.В., Ситник С.М. Приложения гипергеометрических функций к аналитическому и приближенному вычислению одного класса интегралов в задачах расчета конструкций на упругом основании. В кн.: Тез. докл. vii Понтрягинских чтений, Воронеж, 1996, с. 120.

[40] Маламуд М.М. К вопросу об операторах преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений. Препринт / Институт матем. АН УССР. Киев, 1984.

[41] Маричев О.И. Два уравнения Вольтерра с функциями Горна // ДАН СССР. 1972, т. 204, №3, с. 546-549.

[42] Маричев О.И. Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск: Наука и техника, 1978. 310 с.

[43] Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. Киев, 1972.

[44] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977. 331 с.

[45] Марченко В.А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры. Киев, 1986.

[46] Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М., 1990. 288 с.

[47] Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.

[48] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды, т. 3. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.

[49] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982. 443 с.

[50] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987. 688 с.

[51] Ситник С.М. О скорости убывания решений стационарного уравнения Шредингера с потенциалом, зависящим от одной переменной. В кн.: Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 1985. С. 139-147.

[52] Ситник С.М. В кн.: Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1987. С. 168-173.

[53] Ситник С.М. О скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. 1988, т. 24, №3, с. 538-539.

[54] Ситник С.М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана-Эрдейи нулевого порядка гладкости. Препринт / Институт автоматики и процессов управления ДВО АН СССР. Владивосток, 1990. 44 с.

[55] Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи // ДАН СССР. 1991, т. 320, №6, с. 1326-1330.

[56] Ситник С.М., Фадеев С.А. Об одной паре операторов преобразования // Воронеж, 1988. Деп. ВИНИТИ 13.07.1988. №5629-В88.

[57] Фаге М.К. Нагнибида Н.И. Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 280 с.

[58] Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.

[59] Шадан К. Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М., 1980.

[60] Шехтер О.Я. О влиянии мощности слоя на распределение напряжений в фундаментной балке // Сборник НИС треста глубинных работ. 1939, №10.

[61] Шехтер О.Я. К расчету фкндаментных плит на упругом слое грунта конечной мощности // Сборник трудов НИИ Министерства строительства военных и военно-морских предприятий, "Основания и фундаменты". 1948, №11.

[62] Barnes E.W. The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor's series // Phil. trans. London (A), 1906, №206, p. 249-297.

[63] Barnes E.W. The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series // Proc. London Math. Soc. (2) 1907, №5, p. 59-116.

[64] Barnes E.W. A new development of the theory of the hypergeometric functions. // Proc. London Math. Soc. (2) 1908, №6, p. 141-177.

[65] Bleistein N., Handelsman R.A. Asymptotic expansions of integrals. Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1975.

[66] Bochner S. Some properties of modular relations // Ann. of Math. 1951, №53, p. 332-363.

[67] Bochner S. Theorem on analytic continuation which occur in the study of Riemann's functional equation // Journ. Indian Math. Soc., New Series. 1957, №21, p. 127-147.

[68] Bochner S. On Riemann's functional equation with multiple gamma factors // Ann. of Math. 1958, №67, p. 29-41.

[69] Boersma J. On a function, which is a special case of Meijer's G-function // Compos. Math. 1962, №15, p. 34-63.

[70] Braaksma B.L.J. Asymptotic expansions and analytic continuations for a class of Barnes integrals // Compositio Math. 1964. Vol. 15, №3, p. 239-341.

[71] Bresters D.W. On a generalized Euler-Poisson-Darboux Equation // SIAM J. Math. Anal. 1978, Vol. 9, №5, p. 924-934.

[72] Buschman R.G. An inversion integral for a Legendre transformation // Amer. Math. Mon. 1962, Vol. 69, №4, p. 288-289.

[73] Buschman R.G. An inversion integral for a general Legendre transformation // SIAM Rev. 1963, Vol. 5, №3, p. 232-233.

[74] Copson E.T. On a singular boundary value problem for an equation of hypergeometric type // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1958, Vol. 1, №4, p. 349-356.

[75] Carroll R., Showalter R. Singular and degenerate Cauchy problems. Academic Press, 1976.

[76] Carroll R. Transmutation and operator differential equations. North-Holland, 1979.

[77] Carroll R. Transmutation, scattering theory and special functions. North-Holland, 1982. 457 p.

[78] Carroll R. Transmutation theory and applications. North-Holland, 1985. 351 p.

[79] Carroll R. Mathematical Physics. North-Holland, 1988.

[80] Carroll R. Topics in soliton theory. North-Holland, 1991.

[81] Chandrasekharan K., Narasimhan R. Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions // Ann. of Math. 1962, №76, p. 93-136.

[82] Clausen T. Ueber die Falle, wenn die Rerhe von der Form... // J. Reine Angew. Math. 1828, №3, p. 89-91.

[83] Colton D. PDE in the complex domain. Pitman, 1976.

[84] Colton D. Analytic theory of PDE. Pitman, 1980.

[85] Colton D., Kress R. Integral equation methods in scattering theory. Wiley, 1983.

[86] Deans S.R. Gegenbauer transforms via the Radon transfor m// SIAM J. Math. Anal. 1979, Vol. 10, p. 577-585.

[87] Deans S.R. The Radon Transform and some of its applications. Wiley, 1983.

[88] Delsarte J. Sur certains transformations fonctionnelles relatives aux equations lineaires aux derivees partielles du second ordre // C.R. Acad. Sci. Paris. 1938, №206, p. 1780-1782.

[89] Delsarte J. Une extension nouvelle de la theorie des fonctions presque-periodiques de Bohr // Acta Math. 1938, №69, p. 259-317.

[90] Delsarte J., Lions J. Transmutations d'operateurs differentiels dans le domaine complexe // Comm. Math. Helv. 1957, №32, p. 113-128.

[91] Dixon A.L., Ferrar W.L. A class of discontinuos integrals // Quart. Journ. Math. Oxford Ser. 1936, №7, p. 81-96.

[92] Erdelyi A. Some applications of fractional integration // Boeing Sci. Res. Labor. Docum. Vath. 1963, Note №316, D1 - 82 - 0286. p. 23.

[93] Erdelyi A. An integral equation involving Legendre functions // J. SIAM. 1964. Vol. 12, №1, p. 15-30.

[94] Erdelyi A. An application of fractional integral // J. Analyse Math. 1965, Vol. 14, p. 113-126.

[95] Erdelyi A. Some integral equations involving finite parts of divergent integrals // Glasgow Math. J. 1967. Vol. 8, №1, p. 50-54.

[96] Erdelyi A. On the Euler-Poisson-Darboux equation // J. Analyse Math. 1970, Vol. 23, p. 89-102.

[97] Ford W.B. The asymptotic developments of functions defined by Maclaurin series. Ann Arbor, 1936.

[98] Fox C. The asymptotic expansion of generalized hypergeometric functions // Proc. London Math. Soc. (2). 1928, №27, p. 389-400.

[99] Fox C. The G and H functions as symmetrical Fourier kernels // Trans. Math. Soc. 1961, №98, p. 395-429.

[100] Gilbert R. Function theoretic methods in PDE. Academic Press. 1969.

[101] Gilbert R. Constructive methods for elliptic equations. SPringer Lect. Notes Math. 1974, 365.

[102] Gilbert R., Begehr H. Transformatins, transmutations and kernel functions. Longman, Pitman, 1992.

[103] Gray A., Mathews G.B., A treatise on Bessel functions and their applications to physics. Macmillan and Co., London, 1931.

[104] Heywood P., Rooney P.G. On the boundedness of Lowndes' operators // J. London Math. Soc. 1975, Vol. 10, №2. p. 241-248.

[105] Heywood P., Rooney P.G. On the Gegenbauer transformation // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1990. Vol. 115A, p. 151-166.

[106] Higgins T.P. A hypergeometric function transform // J. SIAM 1964, Vol. 12, №3, p. 601-612.

[107] Hughes H.K. On the asymptotic expansions of entire functions defined by Maclaurin series // Bull. Amer. Math. Soc. 1944, №50, p. 425-430.

[108] Hughes H.K. The asymptotic developments of a class of entire functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1945, №51, p. 456-461.

[109] Jeffrey A. Nonlinear wave motion. Pitman, 1989.

[110] Jiang L., Wang Y. On the convergence of the fundamental solution functions for the foundation plate on an elastic half space // Jnl. Numer. Methods & Comput. Appl. 1990, №11 (1), p. 35-41.

[111] Lions J. Quelques applications d'operateurs de transmutation // Colloques internat. Naney. 1956 (9-15 avril), p. 125-137.

[112] Lions J. Operateurs de Delsarte et problemes mixtes // Bull. Soc. Math. France. 1956, №84, p. 9-95.

[113] Lions J. Equations differentielles operationnelles. Springer, 1961. 292 p.

[114] Love E.R. Some integral equations involving hypergeometric functions // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1967, Vol. 15, №3, p. 169-198.

[115] Love E.R. Two more hypergeometric integral equations // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1967, Vol. 63, №4, p. 1055-1076.

[116] Lowndes J.S. A generalisation of the Erdelyi-Kober operators // Proc. Edinburgh Math. Soc. Scr. 2. 1970, Vol. 17, №2, p. 139-148.

[117] Lowndes J.S. An application of some fractional integrals // Glasgow Math. J. 1979, Vol. 20, №1. p. 35-41.

[118] Lowndes J.S. On some generalisations of the Riemann-Lioville and Weyl fractional integrals and their applications // Glasgow Math. J. 1981, Vol. 22, №2. p. 173-180.

[119] Lowndes J.S. Cauchy problems for second order hyperbolic differential equations with constant coefficients // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1983, Vol. 26, №3, p. 307-311.

[120] Ludwig D. The Radon transform on Euclidian space // Comm. on Pure and Appl. Math. 1966, Vol. XIX, p. 49-81.

[121] MacRobert T.M. Induction proofs of the relations between certain asymptotic expansions and corresponding generalised hypergeometric series // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1938, №58, p. 1-13.

[122] Mathai A.M., Saxena R.K. Generalized hypergeometric functions with applications in statistics and phisical sciences. Lecture Notes in Math., 348, Springer, Berlin, 1973.

[123] Mathai A.M., Saxena R.K. The H-function with applications in statistics and other disciplines. New York-London-Sydney- Toronto: Halsted Press Book, 1978.

[124] Meijer C.S. Ueber Whittakersche bzw. Besselsche Funktionen und deren Produkte // Nieuw Arch. Wiskunde. 1936, (2) 18, p. 10-39.

[125] Meijer C.S. Integraldarstellungen fuer Whittakersche Funktionen und ihre Produkte // Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 1941, №44, p. 435-441, 599-605.

[126] Meijer C.S. On the G-function I-VIII // Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. 1946, №49, p. 227-237, 344-356, 457-469, 632-641, 765-772, 936-943, 1063-1072, 1165-1175.

[127] Muller C., Reihberg R. Uber die Radon Transformation // Math. Meth. in the Appl. Sci. (2). 1960, p. 106-109.

[128] Newsom C.V. On the character of certain entire functions in distant portions of the plane // Amer. J. Math. 1938, №60, p. 561-572.

[129] Newsom C.V. The asymptotic behavior of a class of entire functions // Amer. J. Math. 1943, №65, p. 450-454.

[130] Oberhettinger F. Tables of Mellin Transforms. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[131] Olver F.W.J. Note on the asymptotic expansion of generalized hypergeometric functions // Journ. London Math. Soc. 1953, №28, p. 462-464.

[132] Kaminski D., Paris R.B. Asimptotics of a class of multidimentional Laplace-type integrals I. Double integrals.

[133] Kaminski D., Paris R.B. Exponencial asymptotic expansions and the Mellin-Barnes integral. Univ. Abertay Dundee Tech. Report MACS 96:02.

[134] Pochhammer L. // J. Reine Angew. Math. 1870, №71, p. 316-352.

[135] Pochhammer L. // J. Reine Angew. Math. 1888, №102, p. 76-159.

[136] Pochhammer L. // J. Math. Ann. 1893, №41, p. 197-218.

[137] Pochhammer L. // J. Reine Angew. Math. 1893, №112, p. 58-86.

[138] Pochhammer L. // J. Math. Ann. 1895, №46, p. 584-605.

[139] Pochhammer L. // J. Math. Ann. 1898, №50, p. 285-302.

[140] Saigo M. A generalization of fractional calculus // Fractional calculus: Res. Notes Math. №138. Pitman, 1985, p. 188-198.

[141] Saigo M. A certain boundary value problem for the Euler-Darboux equation. III // Math. Japan. 1981, Vol. 26, №1. p. 103-119.

[142] Saigo M. Asymptotic behaviors of the Horn hypergeometric series G_1, G_2, H_1, H_2, H_4, H_6, H_7 near boundaries of their convergence regions // Integral Transforms and Special Functions. 1996, Vol. 4, №3. p. 249-262.

[143] Slater L.J. Generalized Hypergeometric Functions. London - New York, Cambridge Univ. Press, 1966.

[144] Soni K. Exact error terms in the asymptotic expansion of a class of integral transforms I (Oscillatory kernels) // SIAM J. Math. Anal., №11, 1980, p. 828-841.

[145] Srivastava H.M., Karlsson P.W. Multiple Gaussian hypergeometric series. New York, Chichester, 1985.

[146] Ta Li. A new class of integral transforms // Proc. AMS. 1960, Vol. 11, №2, p. 290-298.

[147] Ta Li. A note on integral transform // Proc. AMS. 1961, Vol. 12, №6, p. 556.

[148] Watson G.N. A class of integral functions defined by Taylor's series // Trans. Cambr. Phil. Soc. 1913, №22, p. 15-37.

[149] Wong R. Error bounds for asymptotic expansions of Hankel transforms // SIAM J. Math. Anal. Vol. 7, №6, Nov. 1976, p. 799-808.

[150] Wong R. Error bounds for asymptotic expansions of integrals // SIAM Review. Vol. 22, №4, Oct. 1980, p. 401-435.

[151] Wrinch D. An asymptotic formula for the hypergeometric function ${}_0\Delta_4(z)$ // Philos. Magazine (6). 1921, №41, p. 161-173.

[152] Wrinch D. A generalized hypergeometric function with n parameters // Philos. Magazine (6). 1921, №41, p. 174-186.

[153] Wrinch D. Some approximations to hypergeometric functions // Philos. Magazine (6). 1923, №45, p. 818-827.

[154] Wright E.M. The asymptotic expansion of the generalized Bessel functions // Proc. London Math. Soc. (2). 1935, №38, p. 257-270.

[155] Wright E.M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric functions // Journ. London Math. Soc. 1935, №10, p. 286-293.

[156] Wright E.M. The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor series // Phil. Trans. Roy. Soc. London (A). 1940, №238, p. 423-451.

[157] Wright E.M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // Proc. London Math. Soc. (2). 1940, №46, p. 389-408.

[158] Wright E.M. The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. Journ. Math. Oxford Ser. 1940, №11, p. 36-48.

[159] Wright E.M. The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor series (second paper) // Phil. Trans. Roy. Soc. London (A). 1946, №239, p. 217-222.

[160] Wright E.M. A recursion formula for the coefficients in an asymptotic expansion // Proc. Glasgow Math. Ass. 1959-1960, №4, p. 38-41.

[161] Young E.C. On a generalized Euler-Poisson-Darboux equation // J. Math. and Mech. 1969, Vol. 18, №12, p. 1167-1175.

Рис. 1. Приближенное вычисление интеграла при различных значениях параметров.

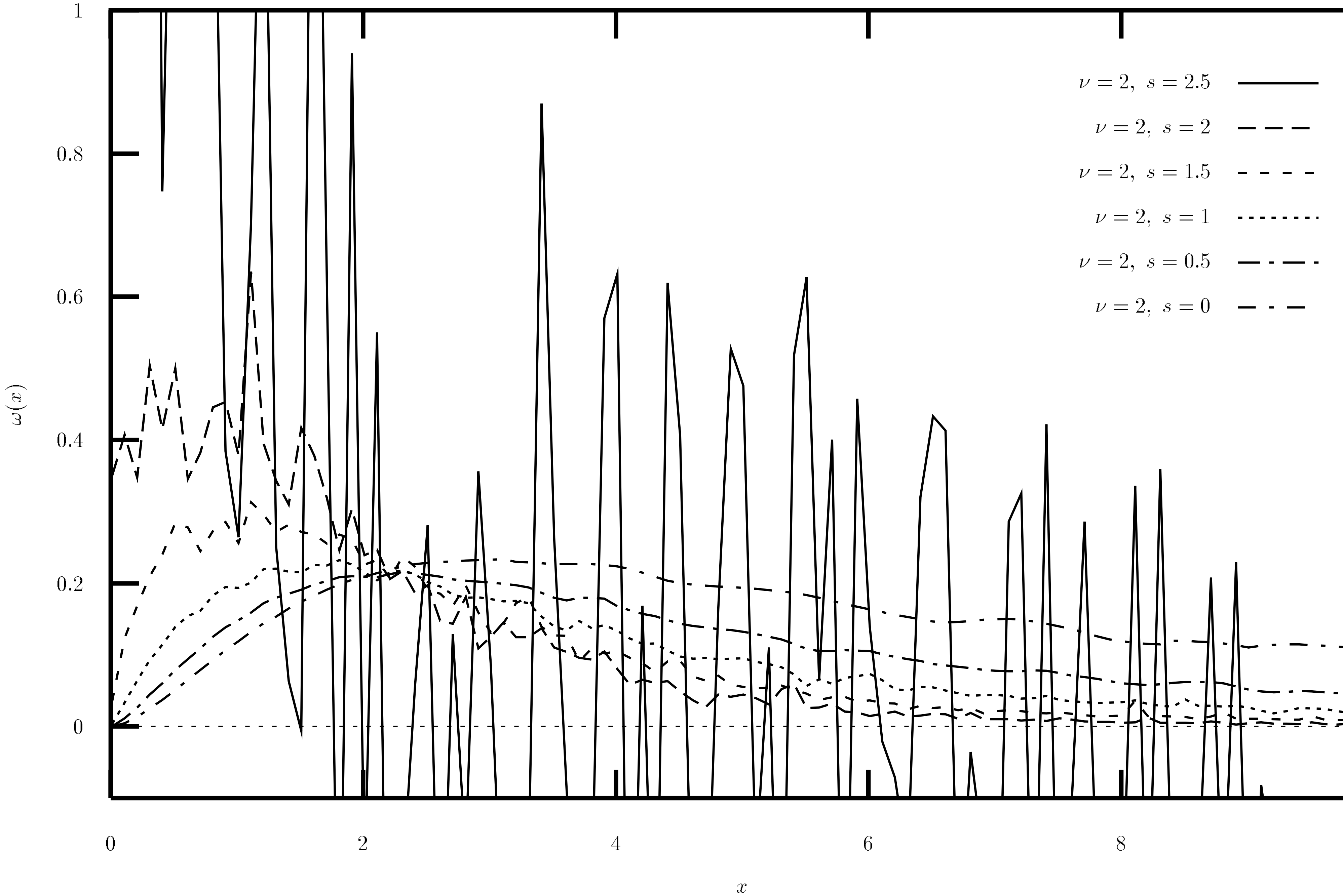

Рис. 2. Три метода вычисления функции. Случай $\nu = 0,\ s = 0$.

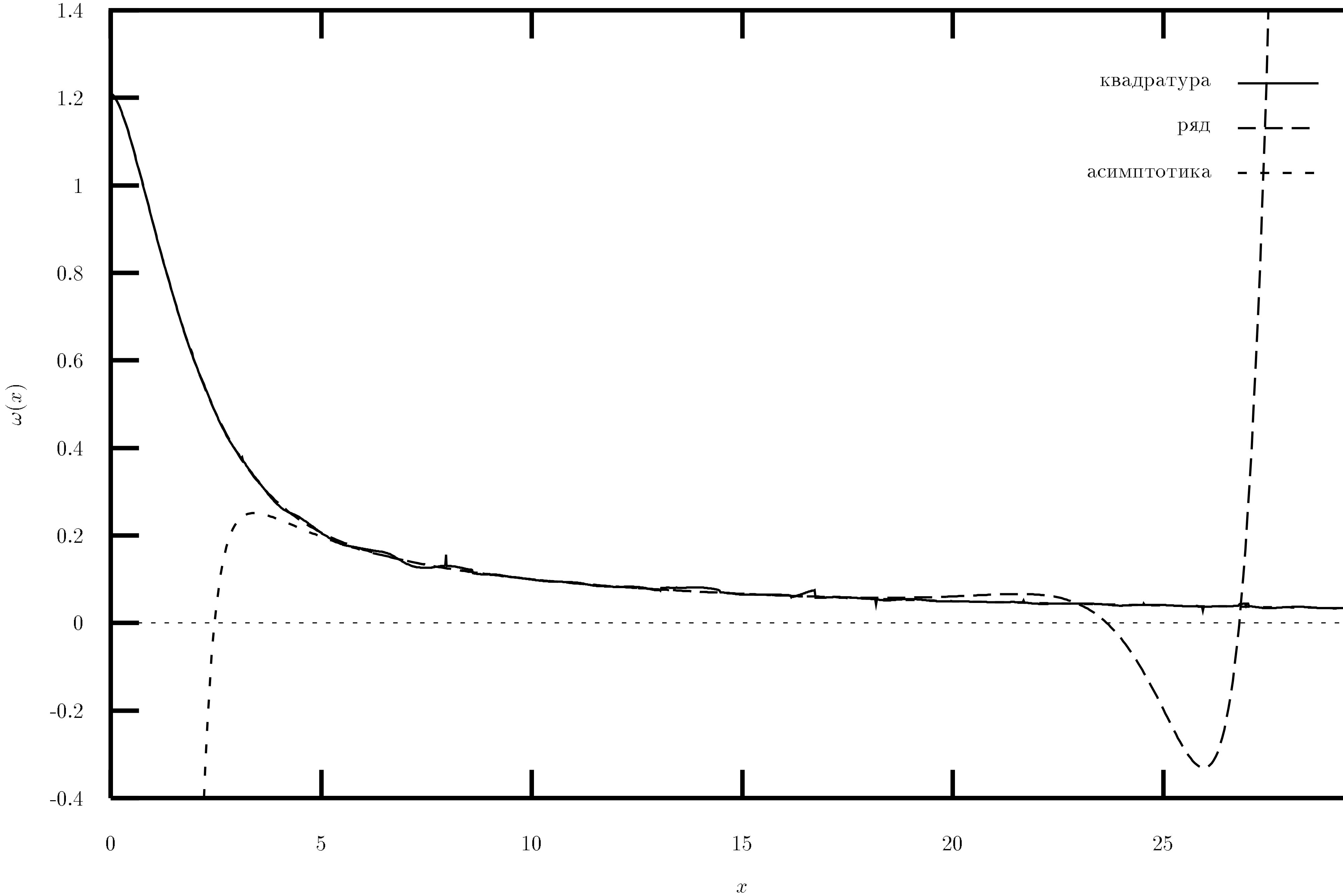

Рис. 3. То же, что и на Рис. 2 для случая $\nu = 0,\ s = 1$.

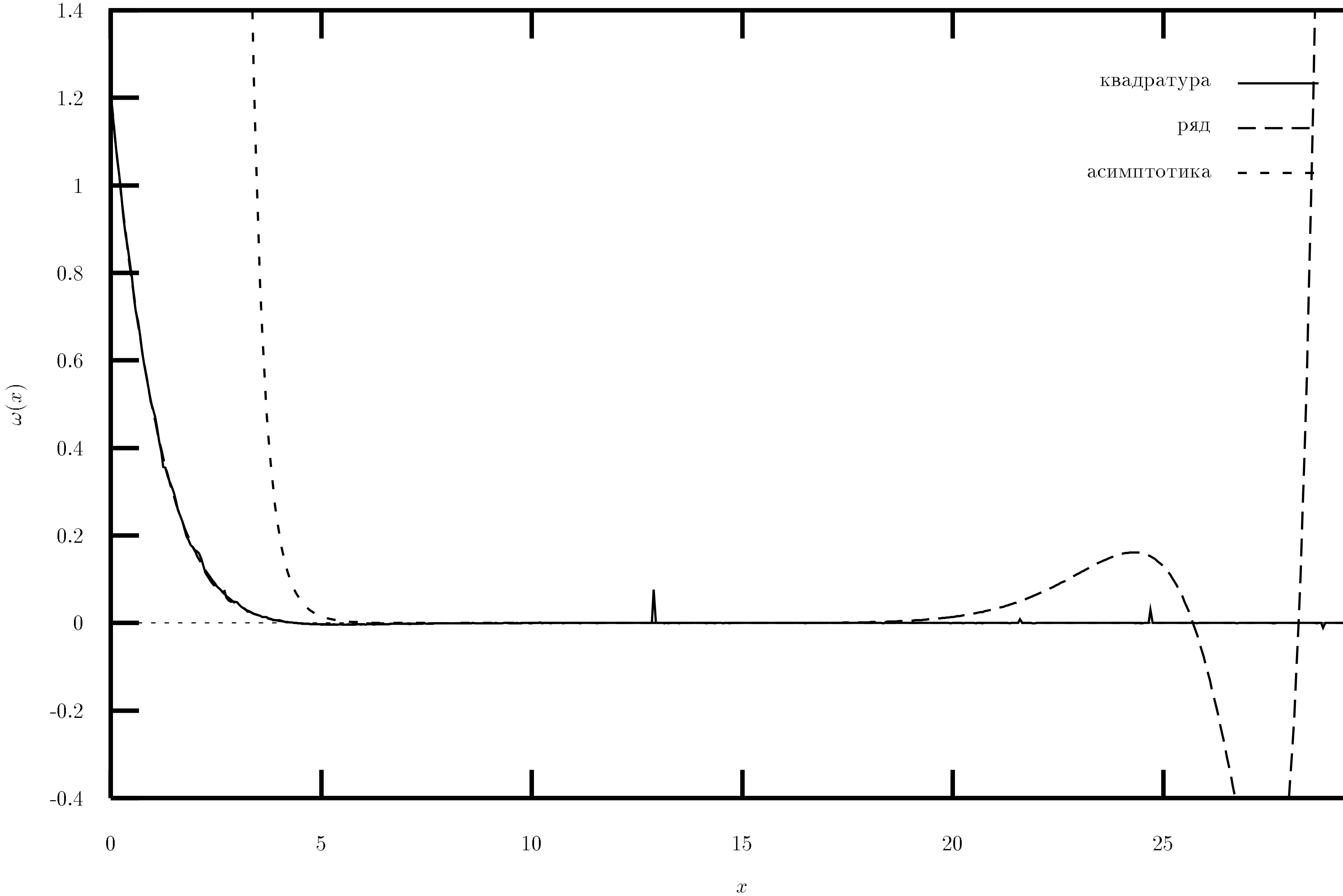

Рис. 4. Случай $\nu = 0,\ s = 1$.

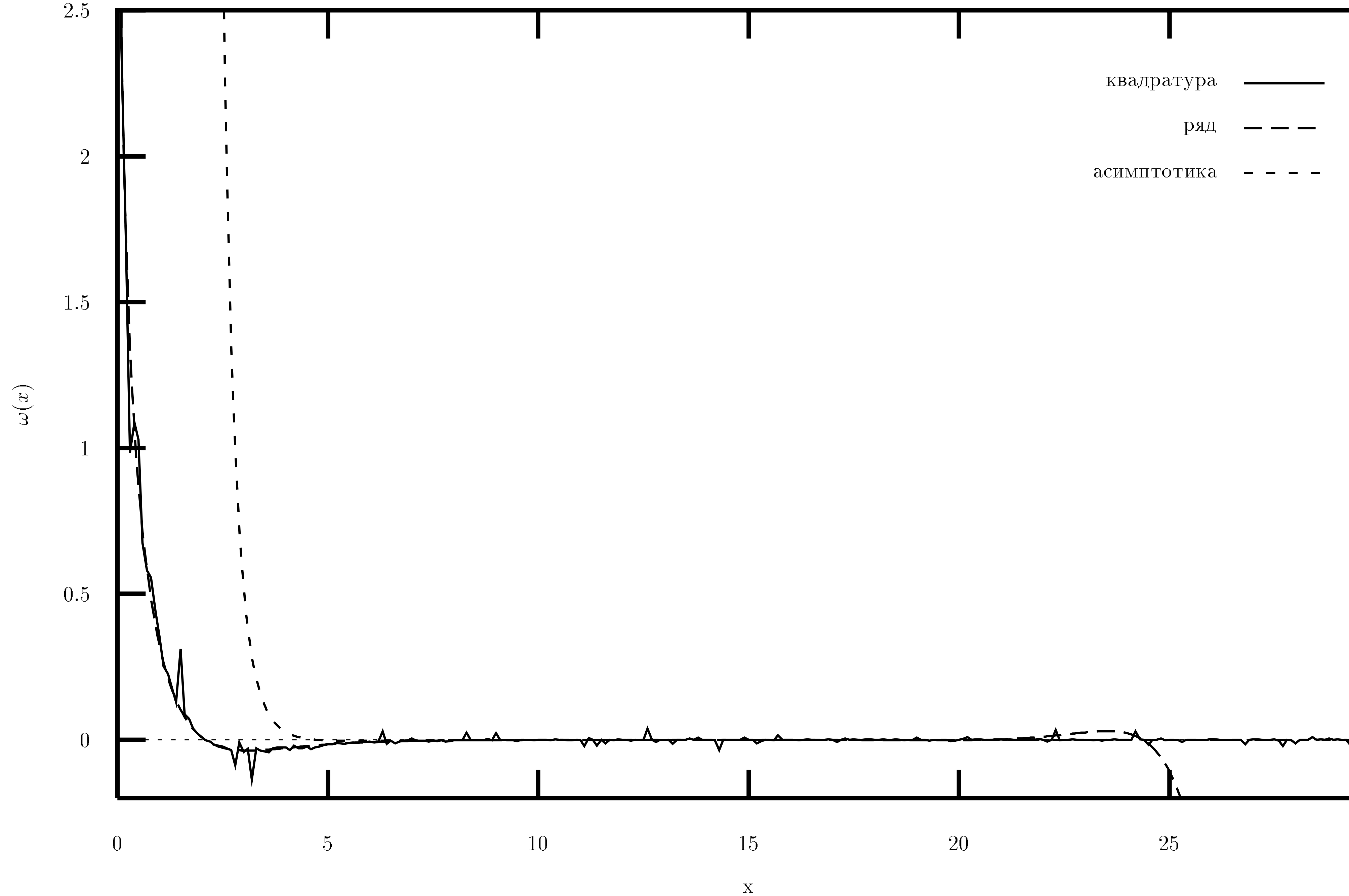

Рис. 5. Случай $\nu = 2, s = 0$.

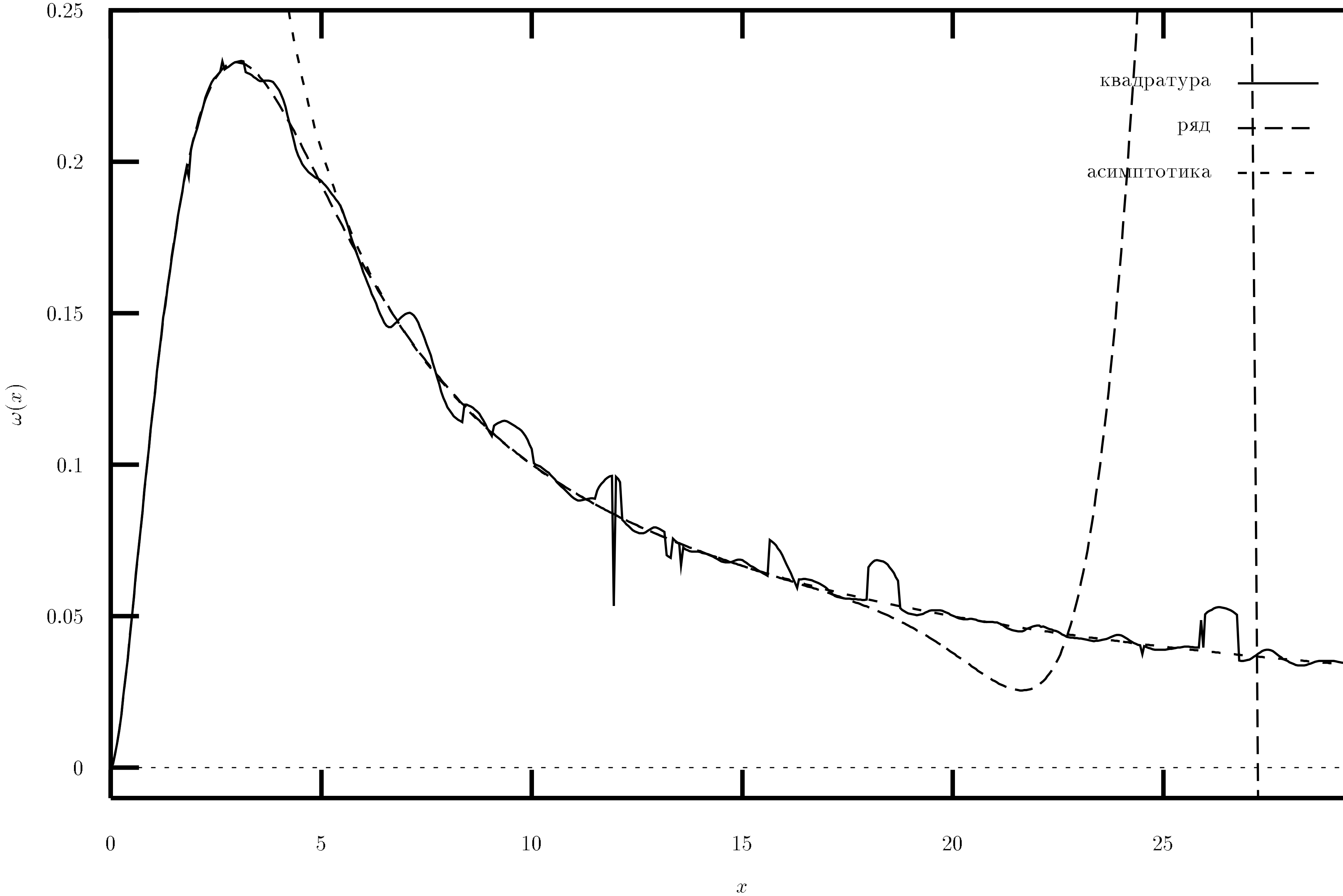

Рис. 6. Случай $\nu = 2,\ s = 1.$